①

Permutáció: sorbarendezés

- ismétlés nélküli: n különböző dolog sorbarendezése: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = \boxed{n!}$
- ismétléses: n dolog sorbarendezése, de van benne $k_1, k_2, \ldots, k_e$ db egyforma

$\boxed{\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_e!}}$ = összes lehetséges sorbarendezés ha mindet meg tudjuk különböztetni

k_m egyforma elem $k_m!$ különböző sorrendben helyezkedhet el, amit nem tudunk megkülönböztetni.

Variáció: n különböző dologból k tagú sorozat

- ismétlés nélküli: minden dolgot csak egyszer lehet választani

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ db}} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

- ismétléses: minden helyre ~~k~~ n dologból választhatunk

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k \text{ db}} = \boxed{n^k}$$

Kombináció: n különböző dologból k kiválasztása, sorrend nem számít

- ismétlés nélküli: minden dolgot csak egyszer lehet választani

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \boxed{\binom{n}{k}}$$

n dologból k tagú sorozat, minden k tagú csoport $k!$-szor van benne

- egy dolgot többször is lehet választani (* ha választunk belőle)

$$\underbrace{\;|\; {*}{*} \;|\; \;|\; {*} \;|\; \;|\; \;|\; {*}}_{n+k-1 \text{ hely},\ n-1 \text{ db } | \text{ és } k \text{ db } *}$$

$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4\ \ldots\ d_{n-1}\ d_n$

→ egy adott |* sorozat egyértelműen meghatároz egy kiválasztást

$n+k-1$ hely, $n-1$ db | és k db *: csillagok helye: $\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$

Pascal háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

Áll: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Biz: n fős testület, k fős delegáció

$\binom{n}{k}$ ← delegáció kiválasztása, egyértelműen meghatározza az itthon maradókat.

$\binom{n}{n-k}$ ← itthon maradók kiválasztása, egyértelműen meghatározza a delegációt.

Áll: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Biz: n fős testület, k fős delegáció | Kovács úr mindenképp a delegáció része | Kovács úr semiképp sem a delegáció része

Binomiális tétel: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$

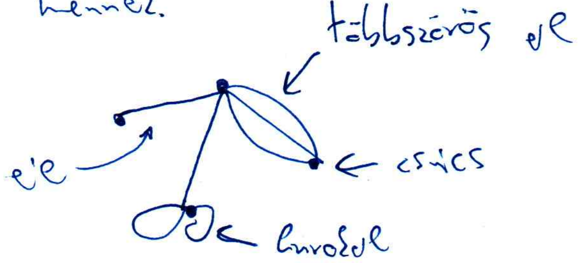
Biz: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ db}} = \ldots \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

minden zárójelből a-t vagy b-t választunk

a-t $\binom{n}{k}$ módon választhatjuk ki

②

Egy gráf csúcsokból és élekből áll, az élek két csúcs között mennek.



Egyszerű gráf: olyan gráf, amelyben nincs többszörös és hurokél. (E(G) V(G) kételemű részhalmazainak részhalmaza)

G gráf csúcshalmazát $V(G)$, élhalmazát $E(G)$ jelöli.

Komplementer gráf: egyszerű G komplementergráfja $\overline{G}$

$V(\overline{G}) = V(G)$ $\quad E(\overline{G}) = \{u, v \in V(G) : \{u, v\} \notin E(G)\}$

Izomorfia: G izomorf H-val, ha $\exists f : V(G) \to V(H)$ kölcsönösen egyértelmű függvény, hogy

$\forall u, v \in V(G)$: u és v közötti élek száma G-ben = f(u) és f(v) közötti élek száma H-ban

---

G-ben $e \in E(G)$ törlése: $V(G') = V(G)$ $\quad E(G') = E(G) \setminus \{e\}$

G-ben $v \in V(G)$ törlése: $V(G') = V(G) \setminus \{v\}$ $\quad E(G') = E(G) \setminus \{$v-re illeszkedő élek$\}$

H részgráfja G-nek, ha megkapható G-ből élek és csúcsok törlésével

H feszített részgráfja G-nek, ha megkapható G-ből csak csúcsok törlésével

---

$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ élsorozat, $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V(G)$

$e_1, e_2, \ldots, e_n \in E(G)$ (n nem csúcsszám)

$i = 1, \ldots, n$: $e_n = \{v_{n-1}, v_n\}$

ta: olyan élsorozat, amelyben nem ismétlődik él

t: olyan élsorozat, amelyben nem ismétlődik csúcs

Kör: olyan ~~út~~, amelynek kiinduló és végpontja megegyezik

G gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között létezik út.

Def Legyen $v \in V(G)$

- $w \in V(G)$ elérhető v-ből, ha G-ben $\exists$ $v \rightsquigarrow w$ út.
- $X = \{w : w$ elérhető v-ből$\}$ (csúcs elérhető önmagából)

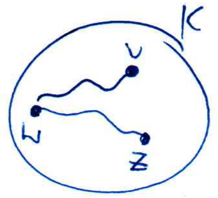
X által feszített részgráf v komponense

Lemma $\left.\begin{array}{l} w \text{ elérhető } v\text{-ből} \\ z \text{ elérhető } w\text{-ből} \end{array}\right\} \Rightarrow v$ elérhető z-ből $\quad v \rightsquigarrow w \rightsquigarrow z$ élsorozat $\rightsquigarrow$ $v \rightsquigarrow z$ út

Tétel Bármely G esetén:

(1) G komponensei öf. (2) G minden csúcsát pontosan 1 komponens tartalmazza

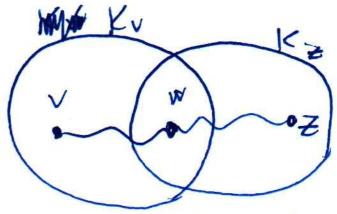
Biz (1)



K komponens

L. $\rightsquigarrow$ út $v \rightsquigarrow z$ $\to$ v elérhető z-ből $\to$ K öf.

(2)



$w \in V(K_v) \cap V(K_z)$

v-ből elérhető z $\to$ $z \in V(K_v)$

z-ből elérhető v $\to$ $v \in V(K_z)$

$\Downarrow$

$K_z = K_w$

F fa, ha összefüggő és körmentes

Tétel F fa, ≥ 2 csúcsú, van benne legalább 2 egyfokú csúcs

Biz Legyen P egy leghosszabb út F-ben ($v \xrightarrow{P} w$). w és v egyfokú csúcsok, mivel F körmentes, és P egy leghosszabb út. (Ha v vagy w nem egyfokú lenne, akkor P nem leghosszabb út lenne.)

Tétel G fa $\Rightarrow$ G csúcsszáma $=$ G élszáma $- 1$

③

Szomszédsági mátrix:

gráf csúcsai: $v_1, v_2, \dots, v_n$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & v_1, & v_2 & \dots \; v_n \\
\hline
v_1 & 1 & 2 & 3 \\
v_2 & 4 & 5 & 6 \\
\vdots & & & \\
v_n & 7 & 8 & 9
\end{array}
\longrightarrow a_{ij}: v_i\text{-ből } v_j\text{-be menő élek száma}
$$

(i: sorindex, j: oszlopindex)

Szomszédsági lista:

v_1: $v_2, v_2, v_3, v_5, v_{10}$ ← v_1-ből ezekbe a csúcsokba mennek élek, ha egy csúcsba több él is megy, akkor az többször szerepel a listában

v_2: v_3, v_5, v_{10}

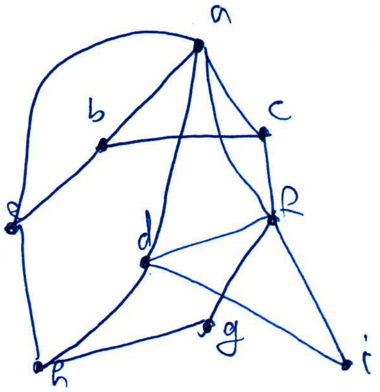
v_3: ...

⋮

Algoritmusok futásideje

futásidő felülbecsülhető $c \cdot s^k$-val (vagy $c \cdot (n+m)^k$), ahol s az input mérete, és c, k konstansok, amik az adott algoritmusra jellemzőek. (n: csúcsok száma, m: élek száma)

BFS:



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	a	b	c	e	d	f	h	i	g
t	0	1	1	1	1	1	2	2	2
m	*	a	a	a	a	a	e	d	f

futásidő: $\forall$ csúcs szomszédsági listáján egyszer megy végig

(szomszédsági lista hossza: $2m$)

lépésszám: $\leq c \cdot (m+n)^1 \longrightarrow$ lineáris

Def G gráfnak F részgráfja feszítőfa, ha

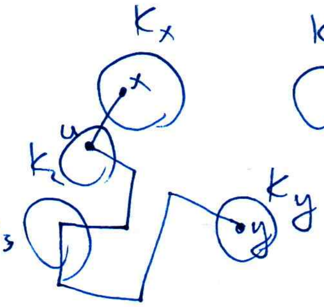
1, fa

2, $V(F) = V(G)$

Tétel G-ben van feszítőfa $\Leftrightarrow$ G összefüggő

$\Rightarrow$: triviális.

$\Leftarrow$ kiindulás: G csúcsait tartalmazó gráf (élek nélkül)



K_x-ben legyen majd a feszítőfa

$\rightarrow \exists\ x \sim y$ út (mivel öf.) (x és y különböző komponensben van)

vegyük az út legelső nem K_x-beli élét, és vegyük hozzá a feszítőfához. Ettől nem lesz benne kör, mivel különböző komponensbe voltak.

Ezt addig ismételjük, amíg feszítőfát nem kapunk.

Minimális összsúlyú feszítőfa

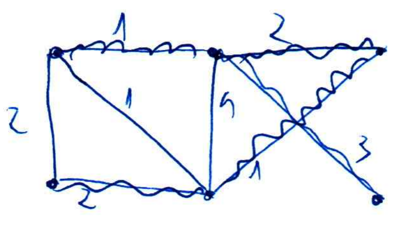
adott: G gráf, $w(e): e \in E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény

F minimális összsúlyú feszítőfa, ha $\sum w(e): e \in E(F)$ minimális

Kruskal alg. (mohó algoritmus)

Minimális összsúlyú feszítőfa keresése:

1. kiindulás: G csúcsait tartalmazó gráf (élek nélkül)
2. (egyik) legkisebb súlyú él kiválasztása, ami két komponens között megy
3. ha már nincs ilyen, készen vagyunk?



Biz (Mohó alg. legkisebb összsúlyú feszítőfát generál)

$\longrightarrow$ súly szerint: sorbarendezés

	e_1	e_2	e_3 ...	e_k	e_{k+1} ... e_m
$F_{mohó}$	1	1	0 1	1	
F_{opt}	1	1	0 1	0	

$\underbrace{\qquad\qquad}_{F_0}$

Vegyük azt a minimális összsúlyú feszítőfát, ami legtovább egyezik mohóval

1. mohó nem választotta, de opt-ban benne van: mohó nem választotta, mivel kör keletkezett volna tőle $\Rightarrow$ F_{opt}-ban van kör ↯

2. mohó beválasztotta, de opt nem: $e_k = \{u, v\}$
F_{opt} feszítőfa (és nem tartalmazza e_k-t) $\Rightarrow$ F_{opt}-ban van út u-ból v-be. ~~(Ez az út nem tartalmazza $e_1, e_2, ..., e_k$-t, mivel~~ ~~tartalmazná, mohó nem választotta volna.)~~ Az út egyik éle legyen e_l, ami $e_l \notin \{e_0, e_1, ..., e_k\}$. Létezik ilyen, mivel ha nem létezne, akkor mohó nem választotta volna e_k-t, mert kör lett volna belőle. Mivel $k < l$, ezért ~~w~~ $w(e_k) \leq w(e_l)$

$F^* = F_{opt}$-ban e_l-t e_k-ra cserélve. F^* összsúlya $\leq$ F_{opt} összsúly.

Mivel F_{opt} minimális összsúlyú, ezért $=$

F^* feszítőfa, mivel összefüggő (e_k hozzáadásával kört hoztunk létre, amit e_l törlésével meg is szüntettünk), ezért tartalmaz feszítőfát ami $n-1$ ~~élt~~ élű, de F^* is $n-1$ élű, azaz F^* feszítőfa.

Így F^* tovább egyezik $F_{mohó}$-val, mint F_{opt}, azaz F_{opt}-ot rosszul választottuk meg ↯

(5)

Hamilton-kör: egyszerű gráf minden ~~csúcsán áthaladó kör~~ csúcsát tartalmazó kör

Hamilton-út: egyszerű gráf minden csúcsát tartalmazó út

Tétel Ha G gráfban van Hamilton-út, akkor $k \geq 1$ csúcs törlésével legfeljebb $k+1$ különböző komponensre esik szét.

Ha G gráfban van Hamilton-kör, akkor $k \geq 1$ csúcs törlésével legfeljebb k különböző komponensre esik szét.

Biz H-kör, k csúcs törlése → max. k db körív → max. k komponens

H-út, k csúcs törlése → max. $k+1$ db körív → max. $k+1$ komponens.

Tétel (Dirac) G egyszerű gráf, ≥ 3 csúcsú

Ha $\forall\, d(v_i) \geq \frac{n}{2}$, akkor a gráfban van H-kör

Tétel (Ore) G egyszerű gráf, ≥ 3 csúcsú

Ha bármely $u, v \in V(G)$: $\{u,v\} \notin E(G)$: $d(u)+d(v) \geq n$, akkor G-ben van H-kör

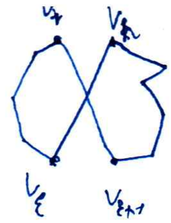
Biz (Ore) Legyen $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ tetszőleges permutáció

Legyen $e(\pi)$ az $\{v_1,v_2\}, \{v_2,v_3\}, \dots, \{v_{n-1},v_n\}, \{v_n,v_1\}$ élek közül a $E(G)$-ben lévők száma

Cél: $e(\pi) = n \to \pi$ kijelöl egy H-kört

alg.: $\pi \rightsquigarrow \pi'$: $e(\pi) < e(\pi')$

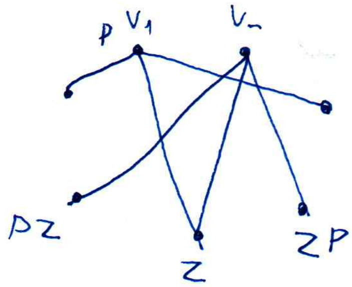
Ha $e(\pi) \neq n$, akkor van benne olyan pár, ami nincs G-ben, ez legyen $\{v_1, v_k\} \notin E(G)$



Cél: k keresése, hogy $\{v_1, v_{k+1}\} \in E(G)$ és $\{v_k, v_n\} \in E(G)$

Legyen $Z := \{v_i : \{v_i, v_n\} \in E(G)\}$

$P := \{v_j : \{v_{j+1}, v_1\} \in E(G)\}$



$|Z| = d(v_n)$ $\quad$ $|P| = d(v_1)$ $\longrightarrow$ $|Z| + |P| \geq n$

v_n nincs kiszámezve $\rightarrow$ van olyan csúcs, ami $v_k \in P \cap Z$

Biz (Dirac): Ore tételből triviálisan következik

——— ∘ ———

Euler-séta: olyan séta, amely a gráf minden élét érinti (egyszer)

Euler-körséta: olyan körséta, amely a gráf minden élét érinti (egyszer)

Tétel G ~~[illegible]~~ összefüggő gráfban van Euler-körséta $\iff$ $\forall$ fokszám páros

séta $\iff$ 2 kivétellel

Biz $\Rightarrow$ séta: kezdő és végcsúcs fokszáma: 2× áthaladásos száma + 1 (amikor elindult vagy véget ért)

többi csúcs: 2× áthaladásos száma

körséta: ↑ kezdő + végcsúcs: 2× áth. sz. + 1 (kiindulás) + 1 (végzés)

Lemma: G gráf $\forall$ fokszám ps: G-ben vaktába séta (elakadásig): $u \rightsquigarrow v \Rightarrow v = u$

~~[illegible]~~ Elakadt x-ben $\Rightarrow$ x: ~~[illegible]~~ 2× áthaladásos száma + 1 (most ott vagyunk)

x fokszáma ps $\Rightarrow$ van él, ami x-re illeszkedik, és még nem jártunk be.

— ∘ —

Legyen P körséta $v \in V(G) \rightsquigarrow v$, u: aktív csúcs $= v$

Ciklus:
- vaktába séta nem P-beli éleken, elakadásig (u)
- séta beszúrása P-be u egy előfordulásánál
- ha Euler-körséta: ✓
- u: olyan csúcs, amire illeszkedik P-beli és nem P-beli él is →

Ciklus vége

e: P-beli él
f: nem P-beli él
x: ~~[illegible]~~ egyik rá illeszkedő csúcs
y: — ,, —
$x = y$ ✓
$x \rightsquigarrow y$ út
↳ lesz olyan csúcs, akol...

— ∘ —

séta: új él felvétele páratlan fokszámú csúcsok közé (ha van)

⑥

G gráf csúcsai k színnel színezhetőek, ha a csúcsok megszínezhetőek úgy k színnel, hogy bármely két szomszédos csúcs különböző színű

G kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel színezhető, de $(k+1)$-el már nem

---

G klikkszáma $\omega(G) = k$, ha van benne k db csúcs, amelyek közül bármely kettő szomszédos, de $(k+1)$ már nincs

Áll: $\omega(G) \leq \chi(G)$

Biz: $\omega(G)$ csúcsú klikk (teljes gráf) $\omega(G)$ színnel színezhető, ezért a G gráf is legalább $\omega(G)$ színnel színezhető.

Mohó színezés:

Input: G gráf, $v_1, v_2, \dots, v_n$ csúcsok sorrendje

$c(v_1) \leftarrow 1$, $C \leftarrow 1$

ciklus 1-től n-ig (i)

$t \in \{1, 2, \dots, C, C+1\}$ közül legkisebb t-t választ, hogy v_i-nek ne legyen t színű szomszédja

$c(v_i) = t$

ha $t = C+1$, akkor C++;

}

Áll: Mohó alg. $\overset{\text{max.}}{\Delta(G)+1}$ színt használ, ahol $\Delta(G)$ a gráf maximális fokszáma

Biz Egy csúcsnak max $\Delta(G)$ szín nem lehet jó

Köv.: $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

Biz mohó

Def.: intervallumgráf: $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallumok

$V(G) = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ $\quad I_i$ szomszédos I_j-vel $\iff I_i \cap I_j \neq \emptyset$

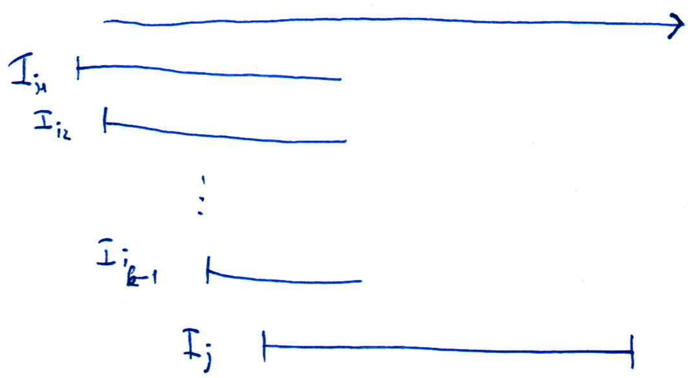
Ilyenekkel izomorf gráfokat nevezzük intervallum gráfnak

Tétel G intervallumgráf: $I_1, I_2, \dots, I_n$

Mohó alg: G, intervallumok bal vége szerint növekvő sorrendbe rendezett csúcsos

↳ $\chi(G)$ színnel színezi a gráfot

Biz: cél $k \le \omega(G) \le \chi(G) \le k$



①, ②, ..., (k-1), (k) ← színek

I_j: elsőként (k)-ra színezett int.

I_j nem kapott ①, mert van ① színű int. átfedésben: I_{i_1}

⋮

I_j nem kapott (k-1) színűt mert ...

$I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{k-1}}, I_j$ k csúcsú klikket alkot $\Rightarrow k \le \omega(G)$

Köv G intervallumgráf: $\omega(G) = \chi(G)$

Def Páros gráf: G páros gráf, ha V(G) felbontható A és B halmazokra, úgy, hogy a gráf ~~élei~~ minden éle A-beli csúcsot kössön össze B-belivel, azaz $\chi(G) \le 2$

Tétel G páros gráf $\Longleftrightarrow$ G nem tartalmaz ptl kört

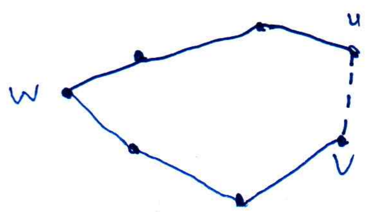
Biz $\Rightarrow$ triv. ✓

$\Leftarrow$ BFS v piros, $\Longleftrightarrow$ t(v) páros | v kék, ~~mert~~ $\Longleftrightarrow$ t(v) páratlan

$e = \{u, v\} \in E(G) \Rightarrow |t(u) - t(v)| \le 1$ | (ha $|t(u) - t(v)| = 1$, akkor nem sérül a feltétel)

Ha $t(u) = t(v)$, akkor u és v nem lehet szomszédos

↳ u és v közös ősének keresése $\Rightarrow t(w) - t(u) = t(w) - t(v) \Rightarrow$ u és w távolsága megegyezik v és w távolságával



↳ ezt {u, v} éllel kiegészítve páratlan kört kapunk ↯

7

Def $M \subseteq E(G)$ egy párosítás / független élhalmaz G-ben, ha G bármely csúcsára legfeljebb egy él illeszkedik M-ből

$\nu(G)$: G-beli legnagyobb párosítás mérete

Def $X \subseteq V(G)$ egy lefogó ~~ponthal~~ ponthalmaz G-ben, ha G minden élének legalább egyik végpontja X-beli

$\tau(G)$: legkisebb lefogó ponthalmaz mérete

Áll: M párosítás, X lefogó ponthalmaz $\Rightarrow |M| \leq |X|$

Biz M minden éléhez legalább egy X-beli pont tartozik, hogy le legyen fogva, mivel M élei függetlenek

Def $X \subseteq V(G)$ független ponthalmaz, ha semelyik két X-beli pont nem szomszédos

$\alpha(G)$: legnagyobb független ponthalmaz mérete

Def $Z \subseteq E(G)$ lefogó élhalmaz G-ben, ha G minden csúcsa legalább egy Z-beli élre illeszkedik

$\rho(G)$: legkisebb lefogó élhalmaz mérete

Áll: Minden G gráfra: $\nu(G) \leq \tau(G)$

Biz: M párosítás, X lefogó ponthalmaz $\Rightarrow |M| \leq |X|$ $\qquad |M| \leq |X|$ $\qquad |M| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |X|$

Áll: Minden (izolált pontot nem tartalmazó) G gráfban: $\alpha(G) \leq \rho(G)$

Biz Legyen Z lefogó élhalmaz, X független ponthalmaz. Z lefogó élhalmaz, ezért X minden pontja illeszkedik Z-beli élre, de egy Z-beli élre csak egy pont illeszkedhet X-ből, mivel X független ponthalmaz $\Rightarrow |X| \leq |Z| \Rightarrow \alpha(G) \leq \rho(G)$

Áll: ~~$X \subseteq V(G)$ lefogó ponthalmaz~~ $X \subseteq V(G)$ lefogó ponthalmaz $\Leftrightarrow V(G) \setminus X$ ftlen ponthalmaz

$\forall$ él egyik vége X-beli

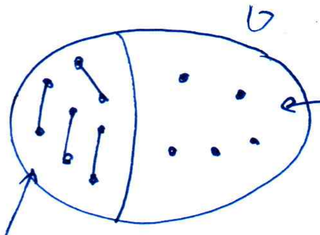
Köv: $\alpha(G) + \tau(G) = n$ (Gallai)

Tétel (Gallai): G gráfban ha nincs izolált pont: ~~∀~~ $\nu(G)+\rho(G)=n$

Lemma G n csúcsú, izolált pontot nem tartalmazó gráf, k egész ≥ 0

1. $\exists$ k elemű párosítás G-ben $\Rightarrow$ $\exists \leq n-k$ elemű lefogó élhalmaz G-ben

G



n−2k csúcs, lefoglaló $\leq n-2k$ éllel

$|\text{lefogó élhalmaz}| \leq n-2k+k = \underline{\underline{n-k}}$

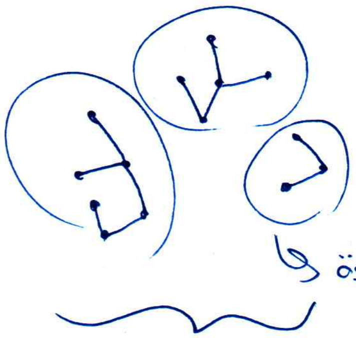
k elemű párosítás, 2k csúcs

2. $\exists$ k elemű ~~párosítás~~ lefogó élhalmaz G-ben $\Rightarrow$ $\exists \geq n-k$ elemű párosítás G-ben

Legyen ez Z

$H := (V(G), Z)$

c legyen a legalább 2 csúcsú komponensek száma H-ban



élszám = csúcsszám = 1

összefüggő, ezért élszám $\geq$ csúcsszám − 1

összesen: élszám $\geq$ csúcsszám − c $\rightsquigarrow$ $k \geq n-c \rightsquigarrow c \geq n-k$

Minden legalább 2 csúcsú komponensből válasszunk egy élt, ezek függetlenek, mivel különböző komponensből származnak

$|\text{független élhalmaz}| \geq n-k$

Biz M maximális párosítás $|M| = \nu(G) \rightsquigarrow \exists \leq \nu(G)-n$ elemű lefogó élhalmaz

$\rho(G) \leq \nu(G)-n \rightarrow \underline{n \leq \rho(G)+\nu(G)}$

Z minimális lefogó élhalmaz $|Z| = \rho(G) \rightsquigarrow \exists \geq \rho(G)-n$ elemű ftlen éll.

$\nu(G) \geq \rho(G)-n \rightarrow \underline{n \geq \rho(G)+\nu(G)}$

$\Downarrow$

$\underline{\rho(G)+\nu(G)=n}$

	max ftlen	min lefogó
él	$\nu(G)$	$\rho(G)$
csúcs	$\alpha(G)$	$\tau(G)$

8

Párosítás páros gráfban: „A" pontosztály elemeihez rendeli közéi „B" pontosztály elemeit.

<u>Javítóutas algoritmus</u>   input: G páros gráf $\to$ A és B pontosztályok

output: M párosítás, amire $|M|$ maximális.

$M \leftarrow$ tetszőleges párosítás (pl. $\emptyset$)

ciklus

P javítóút keresése M-re nézve

Ha nincs ilyen: STOP

$M \leftarrow$ ~~[illegible]~~ $M \setminus \{P$ párosadik élei$\} \cup \{P$ páratlanadik élei$\}$

vége

Def javítóút: - párosítatlan A-beli csúcsból indul

- minden párosadik éle M-beli, minden páratlanadik nem M-beli

- párosítatlan B-beli csúcsban ér véget

$\to$ módosított BFS: - egyszerre minden A-beli párosítatlan csúcsból indul

- Ha $t(u)$ páros, akkor csak nem M-beli élen halad, ha páratlan, akkor csak M-belin

- nincs javítóút, ha BFS nem ér el párosítatlan B-beli csúcsot

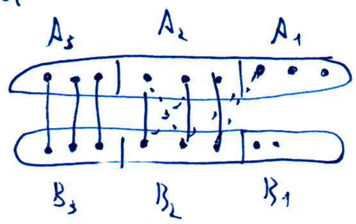
<u>Lemma</u> Tfh. G ps. gráfban M párosításra nézve nincs javítóút:

(1) Legyen A_1 és B_1 a párosítás által nem fedett csúcsok

(2) Legyen A_2 az „A"-ból alternáló úton elérhető csúcsok

(3) B_2 az A_2 párjai

(4) A_3, B_3: maradék



Ekkor G-nek nincs ~~[illegible]~~ $A_1 \cup A_2 - B_1 \cup B_3$ éle

<u>Biz</u> Tfh $\exists\, e = \{a, b\} \ldots$

1: $a \in A_1$, $b \in B_1$: nem lenne a és b párosítatlan, mivel G-ben nincs javítóút ↯ ✓

2: $a \in A_1$, $b \in B_3$: alternáló úton elérhető lenne A_3 ↯

3: $a \in A_2$, $b \in B_1$: a elérhető alternáló úton A_1-beli csúcsból, így $a - b$ javítóút utolsó szakasza lenne, ami nem megengedett ↯

4: $a \in A_2$, $b \in B_3$: B_3-beli csúcs elérhető lenne alternáló úton, ami A_3-beli csúcsokat is elérhetővé tenné alternáló úton ↯

<u>Tétel</u> Ha G ps gráfban M-re nézve nincs javítóút, akkor M max. pár.

<u>Biz</u>: ~~[illegible]~~ $|M| = k = \nu(G) \to$ cél: k elemű lefogó ponthalmaz keresése: $A_3 \cup B_2$

	$A_1 \cup A_2$	A_3
$B_1 \cup B_3$	×	✓
$\to B_2$	✓	✓

Tétel (König) Minden PS gráfra: $\nu(G) = \tau(G)$

Biz előző tételből triviálisan következik

Követ: Gallai: $\nu(G) + \rho(G) = n$; $\alpha(G) + \tau(G) = n$; König: $\nu(G) = \tau(G) \xrightarrow{\text{Biz:}} \alpha(G) = \rho(G)$

Tétel (Hall) G páros gráfban létezik A-t fedő párosítás $\Leftrightarrow \forall X \subseteq A: |N(X)| \geq |X|$

Biz $\Rightarrow$ ✓ triv. $\Leftarrow$: $\xrightarrow{\text{alg.}}$ M psítás

M fedi A-t : ✓ , ha nem: (lemma jelöléssel)

$X := A_1 \cup A_2 \rightarrow N(X) = B_2$

$|X| \geq |N(X)| \longrightarrow |A_1| + |A_2| \geq \underset{\overset{\|}{|A_2|}}{|B_2|} \rightarrow$ feltétel sérül ✓ ↯ □

Tétel (Frobenius)

G ps gráfban van teljes psítás $\Leftrightarrow |A| = |B|$ és $\forall X \subseteq A: |X| \leq |N(X)|$

Biz $\Rightarrow$ triviálisan egyértelmű

$\Leftarrow$ $|A| \neq |B|$ nem lehet teljes psítás

~~Hall~~ Hall-tétel ✓

(5)

Tétel G ps gráf d reguláris $(d \geq 1) \Rightarrow \exists$ teljes párosítás

Biz $\forall$ él A egyik csúcsában végződik (mivel ps), ezért $|E(G)| = d \cdot |A|$ (B-re szintén) $|E(G)| = d \cdot |B| \Rightarrow d \cdot |B| = d \cdot |A| \Rightarrow |A| = |B|$

Legyen $X \subseteq A$, ekkor legyen E_X az X-re illeszkedő élek halmaza

$|X| \cdot d = |E_X|$ $\quad$ $N(X)$-re nem csak E_X-beli élek illeszkednek, de egy csúcsra legfeljebb $d \Rightarrow |E_X| \leq d \cdot |N(X)| \Rightarrow d \cdot |X| \leq d \cdot |N(X)| \Rightarrow |X| \leq |N(X)|$ ✓

Def G gráf élei $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ színnel színezhetőek, ha G minden éle kiszínezhető k különböző szín használatával úgy, hogy bármely két szomszédos él különböző színű legyen.

Def G gráf élkromatikus száma $\chi_e(G) = k$, ha k színnel színezhető, de $(k-1)$-el már nem

All $\forall$ hurokélmentes G gráfra $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$

Biz $\Delta(G)$ fokú csúcsba $\Delta(G)$ db él fut be amiknek mind különböző színűnek kell lennie.

Tétel (Vizing) $\forall G$ egyszerű gráfra $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$ $\quad$ **Biz** $\emptyset$

Köv: $\forall G$ egyszerű gráfra: $\chi_e(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\}$

Tétel (König) $\forall G$ ps gráfra: $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Biz Legyen $d = \Delta(G)$ $\quad$ $d=0 \Rightarrow \chi_e(G) = 0$ triv.

1. eset: G d-reguláris $\rightarrow$ előző tétel szerint van benne teljes párosítás: Legyen ez M_1. Legyen M_1 ① színű. Távolítsuk el M_1-et G gráfból $\rightarrow$ $\rightarrow G$ ekkor $(d-1)$ reguláris $\rightarrow \ldots$ d lépés után $d-d=0$, összesen d db teljes párosítást színeztünk ki d db színnel ✓

2. eset G nem d-reguláris $G \rightsquigarrow G'$ d-reguláris

$|A| \neq |B| \to$ A vagy B kiegészítése új csúcsokkal

$\to$ Válasszunk tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ csúcspárt, hogy $d(a) < d$ és $d(b) < d$, ~~mellettük között éle~~ $\to \{a,b\}$ él hozzáadása (akkor is ha már volt ilyen)

ism, amíg lehet $\to$ A vagy B csúcsai közül mindegyik foka d $\to$

$\to$ legyen ez A, ekkor $m = d \cdot |A|$ (~~m~~ $\forall$ él pontosan egyik végpontja A-beli)

B fokszámai max d lehetnek (kezdetben $d = \Delta(G)$ és alg. mindig $d(b) < d$ csúcsot választott)

Tfh. B-ben van d-nél kisebb fokszámú csúcs $\Rightarrow m < d \cdot |B|$

de $|A| = |B| \Rightarrow d \cdot |A| = d \cdot |B| \Rightarrow$ ellentmondás $\lightning$

B $\forall$ foka d $\Rightarrow$ G' d-reguláris $\Rightarrow$ 1. eset

(10)

Def: Hálózat: Adott: G gráf, $s,t \in V(G)$ $s \neq t$, $c(e)$ kapacitás fv. $E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

A (G,s,t,c)-t hálózatnak nevezzük

Def: Folyam: $f: E(G) \to \mathbb{R}$: $\forall e \in E(G): 0 \leq f(e) \leq c(e)$ és $\forall$

G $\forall$ csúcsára: $\sum_{e:\leftarrow} f(e) = \sum_{e:\rightarrow} f(e)$ (folyammegmaradás) (s-re és t-re nem ír.)

Def: Folyam értéke: $m_f = \sum_{e:\rightarrow} f(e) - \sum_{e:\leftarrow} f(e)$

Def: Vágás: Adott hálózatban $X \subseteq V(G)$-t s-t vágásnak nevezzük, ha $s \in X$ és $t \notin X$

Def: Vágás kapacitása: $c(X) = \sum_{e: X \rightarrow} c(e)$

Def: Legyen f folyam (G,s,t,c) hálózatban. Ekkor H_f segédgráf:

- $V(H_f) = V(G)$
- $e = \{u,v\}$ él előreél, ha $f(e) < c(e)$, akkor e bekerül H_f-be
- $e = \{u,v\}$ él visszaél, ha $0 < f(e)$, akkor $e' = \{v,u\}$ bekerül H_f-be

Def: Javítóút: H_f-ben s-ből t-be menő irányított utat javítóútnak nevezzük

Javítóutas alg. input (G,t,s,c) hálózat, kimenet: f maximális folyam

$f(e) \leftarrow 0$ $\forall e$-re (vagy kiinduló folyam)

ciklus

javítóút keresése H_f-ben BFS segítségével

ha nincs $\rightarrow$ végeztünk, H_f-ben s-ből elérhető csúcsok minimális vágást adnak

ha van $\rightarrow$ δ kiválasztása, úgy, hogy $f(e)+\delta \leq c(e)$ $\forall$ előreélre és $f(e)-\delta \geq 0$ $\forall$ visszaélre

$f(e)$ ~~módot~~ módosítása δ szerint

vége

Áll: f folyam δ-val javítása után is folyam marad

Biz: $\xrightarrow{e} v \xrightarrow{f}$ 4 különböző eset vizsgálata

1. eset e és f is előreél $\xrightarrow{f+\delta}\bullet\xrightarrow{f+\delta}$ bemenő és kimenő mennyiség is δ-val nő

2. eset e előreél és f visszaél $\xrightarrow{f+\delta}\bullet\xleftarrow{f-\delta}$ egyik olyan δ-val több, másik olyan δ-val kevesebb

3. eset e visszaél és f előreél — " —

4. eset e és f is visszaél $\xleftarrow{f+\delta}\bullet\xleftarrow{f-\delta}$ — " —

Áll f tetsz. folyam, X st vágás: $m_f = \sum_{e:\, X\to} f(e) - \sum_{e:\, \to X} f(e)$

Biz s: $m_f = \sum_{e:\, s\to} f(e) - \sum_{e:\, \to s} f(e)$ $\forall$ más X-beli csúcs: $0 = \sum_{e:\, \to} f(e) - \sum_{e:\, \leftarrow} f(e)$

(+) X-en belüli éleket egyszer $\oplus$-al, egyszer $\ominus$-al számoljuk, ezért ezek kiesnek, többi él megmarad.

Áll X tetsz. vágás és f tetsz. folyam: $c(X) \geq m_f$

Biz $m_f = \sum_{e:\, X\to} f(e) - \sum_{e:\, \to X} f(e) \leq \sum_{e:\, X\to} c(e) - 0 = c(X)$

Tétel Ha H_f-ben nincs irányított út s-ből t-be, akkor f maximális

Biz $X :=$ H_f-ben s-ből elérhető csúcsok

X-ből kilépő élek: $f(e) = c(e)$, ha nem így lenne, akkor H_f-ben lenne előreél, és elérhető lenne X-en kívüli csúcs is.

X-be belépő élek: $f(e) = 0$, mivel nincs visszaél...

így: $m_f = \sum_{e:\, X\to} c(e) - \sum_{e:\, \to X} 0 \leq \sum_{e:\, X\to} c(e) - 0 = c(X) \to m_f = c(X) \Rightarrow$ előző áll. szerint folyam maximális.

Tétel (Edmonds-Karp) hálózatban maximális folyam kereső algoritmust futtatva, H_f-ben mindig a legrövidebb javítóutat választva (BFS-sel), legfeljebb $n \cdot m$ javítás után leáll az alg. Biz $\emptyset$

Tétel (Ford-Fulkerson) Bármely hálózatra: $\max m_f = \min c(X)$ X: vágás

Biz Alg $\rightsquigarrow m_f$, $X :=$ H_f-ben s-ből elérhető csúcsok $\Rightarrow$ előző tétel $\Rightarrow$

$m_f = c(X) = d \Rightarrow \max m_f \geq d$, $\min c(X) \leq d$

$d \leq \max m_f \leq \min c(X) \leq d \Rightarrow \max m_f = \min c(X)$

Lemma (egész) $c(v) \in \mathbb{N} \to \exists \max m_f: \forall f(v) \in \mathbb{N}$ Biz alg $\forall$ egész δ-val javít

Általánosítás: több forrás/nyelő $\to$ 1 forrás/nyelő hozzáad $\to$ ezeket ∞ összeköt | irányítatlan él
csúcsok kapacitása $\to$ csúcs szétválasztása $\to$ összekötés kapacitása | 2 ellentétes irányú él

(11)

Def: éldiszjunkt utak: G irányított gráfban $s \in V(G)$-ből $s \neq t \in V(G)$-be k éldiszjunkt út van, ha semelyik kettőnek nincs közös éle

Def: ~~pontd~~ pontdiszjunkt út: pont...

Lemma f folyam, $m_f \geq k$ ($k \in \mathbb{N}$), $f(e) \in \{0,1\}$ $\forall e \in E(G)$ $\Rightarrow$ $\exists$ k db éldiszjunkt út, aminek $\forall$ élére $f(e)=1$

Biz: $k=0$ triviális

$k \geq 1$, P: séta valójában, t-ben fog elakadni, mivel $v \neq s,t$ ~~...~~ csúcsokra a belépő és kilépő élek száma megegyezik

~~...~~ P-ből ismétlődő részek törlése $\rightarrow$ P út $s \rightarrow t$

P élein $f(e)=0$ $\rightarrow$ m_f ~~...~~ eggyel csökken

Ha $m_f > 1$, akkor mégegyszer ugyanez

↳ ~~∄~~ k db éldiszjunkt út

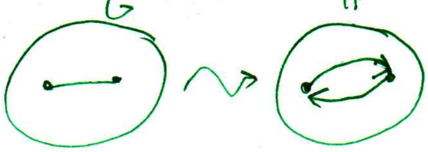
Def G irányított gráfban $Z \subseteq E(G)$ lefogja az s,t utakat, ha minden út tartalmaz legalább egy Z-beli élet

Lemma Legyen G ir. gr. (irányítatlan) s,t... $k \geq$ egész. Ekkor ~~...~~ ekvivalensek:

(1) $\exists$ k db éldiszjunkt s-t út

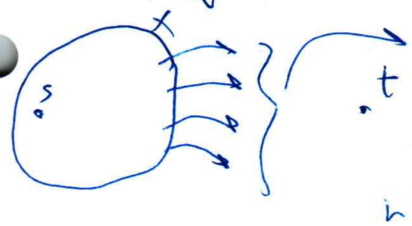
(2) $\nexists$ $(k-1)$ élű s-t utakat lefogó ~~...~~ élhalmaz

(3) $(G^H, s, t, c \equiv 1)$ hálózatban a max folyam $\geq k$



Biz (1) $\Rightarrow$ (2) $P_1, \dots, P_k$ éldiszjunkt utak, Z: s-t utakat lefogó ponthalmaz, Z legalább 1 élt tartalmaz $P_1, P_2, \dots, P_k$-ból, mert ezek éldiszjunktak $\Rightarrow$ $|Z| \geq k$ ✓

(2) $\Rightarrow$ (3) Legyen X tetszőleges s-t vágás H-ban



$\rightarrow$ s-t utakat lefogják, minimum k van belőle

$c(X) \geq k$

Ford-Fulk.

min vágás $\geq k$ $\Rightarrow$ max folyam $\geq k$ ✓

B) ⇒ (1)

Lemma

Egér ⇒ ∃ k folyam, amire $\forall f(e)\in\{0,1\}$ ⇒ ∃ k éldiszjunkt s-t út

Def
$\lambda_G(s,t)$: s-t éldiszjunkt utak maximális száma
$\lambda'_G(s,t)$: s-t utakat lefogó élhalmaz minimális elemszáma

Köv.: (Menger éldiszjunkt utakra) $s,t\in V(G)$, $s\neq t$

Minden G gráf: $\lambda_G(s,t)=\lambda'_G(s,t)$

Biz $k\geq 1$ tetsz. egész

$\lambda_G(s,t)\geq k \iff$ van k db s-t éldiszjunkt út

$\lambda'_G(s,t)\geq k \iff \nexists$ (k-1) élű s-t utakat lefogó élh.

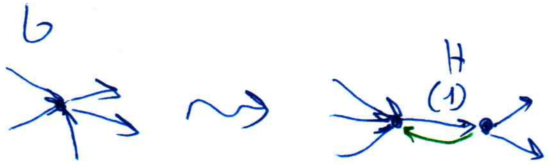
Def $Y\subseteq V(G)$ csúcshalmaz lefogja a G-beli s-t utakat $(s,t\notin Y)$, ha bármely útnak van Y-beli csúcsa

Tétel G irányított/irányítatlan gráf, $k\geq 1$ egész, $s,t\in V(G)$, $s\neq t$, $\{s,t\}\notin E(G)$

Ekvivalensek: (1) ∃ k db pontdiszjunkt s-t út

(2) ∄ (k-1) csúcsú, az s-t utakat lefogó ponthalmaz

(3) $(H, s, t, c\equiv 1)$ hálózatban max folyam $\geq k$



Biz ∅

Def.
$\kappa_G(s,t)$: s-t pontdiszj. utak max. száma
$\kappa'_G(s,t)$: s-t utakat lefogó ponth. min. száma

Köv (Menger pontdiszj.) G gráf, $s,t\in V(G)$, $s\neq t$, $\{s,t\}\notin E(G)$

$\kappa_G(s,t)=\kappa'_G(s,t)$

Def G irányítatlan gráf, $k\geq 1$ egész

- G k-szorosan élösszefüggő, ha (k-1) élet akárhogyan törölve összefüggő marad
- G k-szorosan pontösszefüggő, ha (k-1) pontját akárhogy törölve öf. marad (vagy k-szorosan öf.) és k+1 csúcsa van

Tétel (Menger) G ir.tl. g., $k\geq 1$ egész

1) G k-élöf. ⇔ bármely 2 csúcs között ∃ k éld. út

2) G k-(pont)öf ⇔ —"— pontdiszjunkt, és $|V(G)|\geq k+1$

Biz (1) ⇒ s,t tetszőleges, s-t utak nem foghatók le $\leq k-1$ éllel, mert $\leq k-1$ él törlésével elrontható az öf. ⇒ ∃ k db éldiszjunkt s-t út

Biz 1) ⇐ k-1 él $\boxed{DEL}$
u és v között k éldiszjunkt útból ≥ 1 érintetlen ⇒ u-v út ∃ (tetsz. u, v-re)
G öf.

(12)

<u>Legrövidebb út feladat:</u> adott: G ir. gráf, w konzervatív súlyfv., $s \in V(G)$

P út hossza: $w(P) = \sum\{w(e) : e \text{ } P\text{-n van}\}$

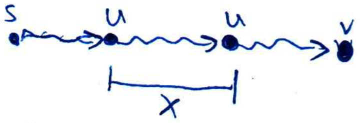
$t(v) = \min\{w(P) : P \text{ } s \rightsquigarrow v \text{ út}\}$

<u>Output:</u> $\forall v \in V(G)$: $t(v)$, $m(v)$ ← legrövidebb út megelőző csúcs

<u>Def</u> w súlyfv. konzervatív, ha nincs benne irányított, negatív összsúlyú kör

<u>Áll</u>: w konzervatív, Q élsorozat $s \to v$, $w(Q) = t$, k élű $\Rightarrow \exists P$ $s \to v$ út, $w(P) \le t$, $\le k$ élű

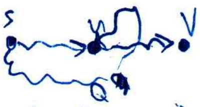
Biz



ismétlődő szakasz kivágása, mivel w konzervatív, ($\to Q'$)

ezért $w(x)$ nemnegatív, ezért $w(Q') \le w(Q)$ $\rightsquigarrow$ amíg van benne ism. P út...

<u>Áll</u> P út $s \rightsquigarrow v$, w konzervatív, P legrövidebb $s \to v$ út



$P_u :=$ $s \to u$ út $\Rightarrow$ P_u legrövidebb $s \to u$ út

<u>Biz</u> (~~...~~ ind.) tfh Q legrövidebb út $s \to v$, ekkor

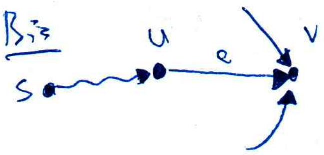
$w(s \overset{Q}{\rightsquigarrow} u \rightsquigarrow v) \le w(P)$ ↯ mivel P legrövidebb

<u>Def</u>: $m(v) :=$ $s \to v$ legrövidebb út utolsó előtti csúcsa

<u>Def</u> $t_k(v)$: $s \to v$ $\le k$ élű utak/élsorozatok közül a legrövidebb hossza

<u>Áll</u> $t_k(v) = \min\{t_{k-1}(u) + w(e) : e = (u,v)\}$, w konzervatív súlyfv.

<u>Biz</u>



P: e-n megérkező $\le k$ élű élsorozatok/utak közül a legrövidebb

P_u: $\le k-1$ élű $s \rightsquigarrow u$ utak/éls. közül a legrövidebb

~~[illegible]~~

Bellman-Ford alg.: input: G ir. gráf, w súlyfv. $s\in V(G)$ csúcs

$t_0(s)=0$, minden más $t_0(v)=\infty$
minden $v\in V(G)$, $v\neq s$-re $m_0(v)=*$

ciklus k: 1-től $(n-1)$-ig,
  $t_k(s)=0$;
  ciklus: v: $V(G)\setminus\{s\}$
    $t_k(v)=t_{k-1}(v)$
    $m_k(v)=m_{k-1}(v)$
    ciklus: e: v-be belépő élek $(e=\{u,v\})$
      ha $t_k(v) > t_{k-1}(v)+w(e)$, akkor $t_k(v)=t_{k-1}(v)+w(e)$, $m_k(v)=u$;
    cv
  cv
cv
$\forall v\in V(G)$ csúcsra: $t(v)=t_{n-1}(v)$, $m(v)=m_{n-1}(v)$

Lépésszám: belső 2 ciklus $\forall$ csúcs $\forall$ élén végigmegy, legfeljebb $c\cdot n$ idő
külső ciklus $(n-1)$-szer fut le, így összesen $c\cdot n\cdot n$ idő alatt fut le.

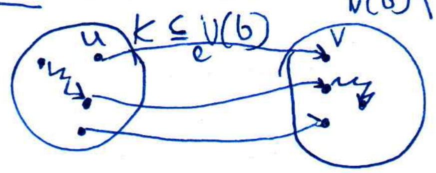
Áll: $\exists$ s-ből elérhető negatív kör $\iff$ $\exists v$: $t_n(v) < t_{n-1}(v)$

Biz $\Leftarrow$ alg. leges | $\Rightarrow$ soha nem stabilizálódik.

—— o ——

Dijkstra $\forall e$: $w(e)\geq 0$

Áll

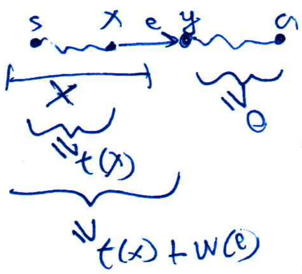


$\forall v\notin K$: $t'(v)=\min\{t(u)+w(e): e=\{u,v\}, u\in K\}$

Legyen „a" olyan csúcs, hogy $a\notin K$ és $t'(a)=\min\{t'(v): v\notin K\}$

Ekkor $t(a)=t'(a)$

Biz $t'(a)$ út van $s\to a$, P tetsz. út K-t az $e=(x,y)$ élen hagyja el



$t'(y)=\min\{t(x)+w(e): e=(x,y), x\in K\}$

$w(P)\geq t(x)+w(e)\geq t'(y)\geq t'(a)$

Alg: input: n csúcsú G gráf, $w(e)\geq 0$ $\forall e$, $s\in V(G)$
$t(s)=0$, $t(v)=\infty$ $\forall v\in V(G)$, $v\neq s$. $m(v)=*$, $K=\{s\}$, $a=s$
ciklus amíg $K\neq V$
  ciklus: e ~~...~~ $=(a,v)$, $v\notin K$
    ha $t(v)>t(a)+w(e)$, akkor $t(v)=t(a)+w(e)$, $m(v)=a$
  ciklus vége
  $a=$ olyan $a\notin K$, amire $t(a)=\min(t(v): v\notin K)$
  $K=K\cup\{a\}$
ciklus vége

Futásidő
belső ciklusnyi:
$(n-1)+(n-2)+(n-3)\ldots+1$
$=\frac{n(n-1)}{2}\leq c\cdot n^2$
$\leq c_2\cdot n^2$

(13)

Def G irányított gráf aciklikus, ha nincs benne irányított kör

Def G irányított gráf csúcsainak $v_1, v_2, \dots, v_n$ sorrendje topologikus sorrend, ha $\forall e = \{v_i, v_j\}$: $i < j$

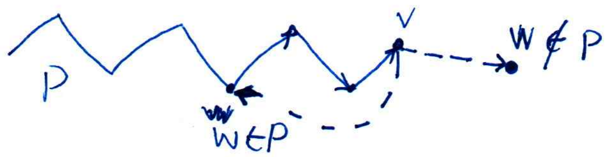
Tétel G-nek van topologikus sorrendje $\Leftrightarrow$ G aciklikus

Biz: $\Rightarrow$ triviális

$\Leftarrow$

Lemma G aciklikus $\Rightarrow$ G-ben van nyelő

Biz P: egyik leghosszabb út (vége: v)



$\to$ ↯ P nem leghosszabb

G van kör P-ben ↯

v_1 ... v_{n-2} v_{n-1} v_n nyelő G-ben

nyelő $(G - v_n)$-ben

(csúcsok törlésével G nem veszti el aciklikusságát)

$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n)$ topologikus sorrend

Leghosszabb / Legrövidebb út aciklikus gráfban

Input: G irányított gráf, $S = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ topologikus sorrend, w súlyfv.

$t(v_1) = 0$

ciklus $i := 2$-től n-ig

$$t(v_i) = \max_{\min} \{ t(v_j) + w(e) : e = (v_j, v_i) \}$$

ciklus vége

Lépésszám: $\leq c \cdot (n+m)$

minden éllel egyszer foglalkozik

minden csúccsal egyszer foglalkozik

(13)

DFS alg $d(v)$: csúcs mélységi száma, hányadikra érte el a DFS.

$f(v)$: csúcs befejezési száma, hányadikra nyilvánította befejezettnek a DFS

$m(v)$: ~~adott~~ csúcsot megelőző csúcs a bejárásban

a: aktív csúcs

Alg: input: G ir. gráf, s kezdőcsúcs $\in V(G)$

$f(v) := *$ $\forall$ csúcs, ~~ff~~

$d(v) := *$ $\forall$ csúcs, $d(s) = 1$, $a = s$, $F = 0$, $D = 1$

végtelen ciklus

ha $\exists\ e = (a, v)$, amire $d(v) = *$, akkor

$D{+}{+}$;

$d(v) = D$;

$m(v) = a$;

$a = v$;

különben

$F{+}{+}$

$f(a) = F$

ha $m(a) \neq *$, akkor $a = m(a)$

különben: a = még bejáratlan csúcs; $D{+}{+}$; $d(a) = D$;

ha nincs ilyen a, STOP;

ciklus vége

Lépésszám:

G szomszédsági listával van megadva

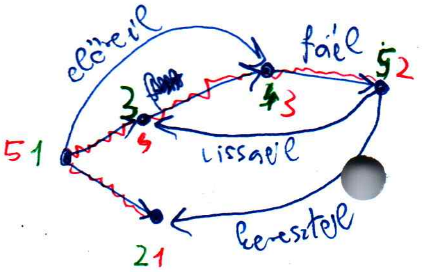
$c \cdot (m+n)$

DFS-erdő $\{m(v), v\}$ élekből áll, ~~fesz~~ ~~mely~~ kiindulás: ~~gráf~~

gráf $\forall$ csúcsot tartalmazza

Élek osztályozása

e: a → v



(bejárás fába)

1, faél: $e \in F$ (F) e: a → v $\iff d(v) = *$

2, előreél: v elérhető a-ból (nem faél) $\iff d(v) > d(a)$

3, visszaél: a elérhető v-ből (nem faél) $\iff d(v) < d(a)$ és $f(v) = *$

4, keresztél a és v nem elérhető egymásból $\iff d(v) < d(a)$ és $f(v) \neq *$

Tétel

G ir. gráf

(1) G aciklikus $\iff$ nem keletkezik visszaél

(2) Ha nincs visszaél $\Rightarrow$ f(v)-k szerint: csökkenő sorrend topologikus sorrend

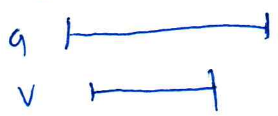
Biz (1) $\Rightarrow$ triviális

(1) $\Leftarrow$ (2)-ből következik

(2)

e: a → v   ~~$f(v) < f(a)$ (g2 marad)~~ $f(v) < f(a)$ teljesül → topologikus sorrend ok ✓

előreél



✓

keresztél

✓

Def csúcs élete