1

Permutáció: sorbarendezés

- ismétlés nélküli: n különböző dolog sorbarendezése: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = \boxed{n!}$
- ismétléses: n dolog sorbarendezése, de van benne $k_1, k_2, \ldots, k_e$ db egyforma

$$\boxed{\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_e!}} = \frac{\text{összes lehetséges sorbarendezés, ha mindet meg tudjuk különböztetni}}{\text{k_m egyforma elem $k_m!$ különböző sorrendben helyezkedhet el, amit nem tudunk megkülönböztetni}}$$

Variáció: n különböző dologból k tagú sorozat

- ismétlés nélküli: minden dolgot csak egyszer lehet választani

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ db}} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

- ismétléses: minden helyre n dologból választhatunk

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k \text{ db}} = \boxed{n^k}$$

Kombináció: n különböző dologból k kiválasztása, sorrend nem számít

- ismétlés nélküli: minden dolgot csak egyszer lehet választani

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \boxed{\binom{n}{k}}$$

n dologból k tagú sorozat, minden k tagú csoport k!-szor van benne

- egy dolgot többször is lehet választani (* ha választunk belőle)

$d_1, \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad \ldots \quad d_{n-1} \quad d_n$

| ** | | * | | | *

→ egy adott |* sorozat egyértelműen meghatároz egy kiválasztást

$\underbrace{\qquad\qquad}$ n+k-1 hely, n-1 db | és k db *: csillagok helye: $\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$

Pascal háromszög

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

Áll: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Biz n fős testület, k fős delegáció

$\binom{n}{k}$ ← delegáció kiválasztása, egyértelműen meghatározza az itthon maradókat.

$\binom{n}{n-k}$ ← itthon maradók kiválasztása, egyértelműen meghatározza a delegációt.

Áll: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Biz

n fős testület k fős delegáció	Kovács úr mindenképp a delegáció része	Kovács úr semiképp sem a delegáció része

---

Binomiális tétel $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$

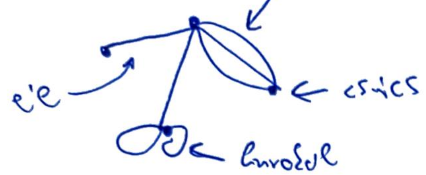
Biz $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ db}} = \dots \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

minden zárójelből a-t vagy b-t választunk

a-t $\binom{n}{k}$ módon választhatjuk ki

2

Egy gráf csúcsokból és élekből áll, az élek két csúcs között mennek.



Egyszerű gráf: olyan gráf, amelyben nincs többszörös és hurokél. ($E(G)$ $V(G)$ kételemű részhalmazainak részhalmaza)

G gráf csúcshalmazát $V(G)$, élhalmazát $E(G)$ jelöli.

Komplementer gráf G komplementergráfja $\overline{G}$

$V(\overline{G}) = V(G)$ $\quad E(\overline{G}) = \{u, v \in V(G) : \{u,v\} \notin E(G)\}$

Izomorfia G izomorf H-val, ha $\exists f: V(G) \to V(H)$ kölcsönösen egyértelmű függvény, hogy

$\forall u, v \in V(G)$: u és v közötti élek száma G-ben $=$ $f(u)$ és $f(v)$ közötti élek száma H-ban

---

G-ben $e \in E(G)$ törlése: $V(G') = V(G)$ $\quad E(G') = E(G) \setminus \{e\}$

G-ben $v \in V(G)$ törlése: $V(G') = V(G) \setminus \{v\}$ $\quad E(G') = E(G) \setminus \{v\text{-re illeszkedő élek}\}$

H részgráfja G-nek, ha megkapható G-ből élek és csúcsok törlésével

H feszített részgráfja G-nek, ha megkapható G-ből csak csúcsok törlésével

---

$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$ élsorozat, $v_0, v_1, \dots, v_n \in V(G)$

$e_1, e_2, \dots, e_n \in E(G)$

(n nem csúcsszám)

$k = 1, \dots, n$: $e_n = \{v_{n-1}, v_n\}$

séta: olyan élsorozat, amelyben nem ismétlődik él

út: olyan élsorozat, amelyben nem ismétlődik csúcs

kör: olyan út, melynek kiinduló és végpontja megegyezik

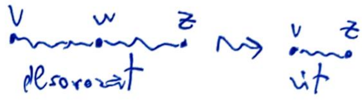
G gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között létezik út.

Def Legyen $v \in V(G)$

- $w \in V(G)$ elérhető v-ből, ha G-ben $\exists$ $v \rightsquigarrow w$ út.
- $X = \{w : w$ elérhető v-ből$\}$ (csúcs elérhető önmagából)

X által feszített részgráf v komponense

Lemma $\left.\begin{array}{l} w \text{ elérhető } v\text{-ből} \\ z \text{ elérhető } w\text{-ből} \end{array}\right\} \Rightarrow v$ elérhető z-ből



Tétel Bármely G esetén:

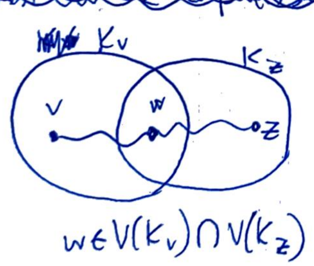
(1) G komponensei öf.

(2) G minden csúcsát pontosan 1 komponens tartalmazza

Biz (1)

L. $\rightsquigarrow$ $v \overset{\text{út}}{\rightsquigarrow} z$ → v elérhető z-ből → K öf.

(2) ~~[illegible]~~



v-ből elérhető z → $z \in V(K_v)$

z-ből elérhető v → $v \in V(K_z)$

⇓

$K_z = K_w$

F fa, ha összefüggő és körmentes

Tétel F fa, ≥ 2 csúcsú, van benne legalább 2 egyfokú csúcs

Biz Legyen P egy leghosszabb út F-ben ($v \overset{P}{\rightsquigarrow} w$). w és v egyfokú csúcsok, mivel f körmentes, és P egy leghosszabb út. (Ha v vagy w nem egyfokú lenne, akkor P nem leghosszabb út lenne.)

Tétel G fa ⇒ G csúcsszáma = G élszáma − 1

③

Szomszédsági mátrix: gráf csúcsai: $v_1, v_2, \dots, v_n$

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1, & v_2 & \dots\ v_n \\ \hline v_1 & 1 & 2 & 3 \\ v_2 & 4 & 5 & 6 \\ \vdots & & & \\ v_n & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

$\to a_{ij}$: v_i-ből v_j-be menő élek száma

Szomszédsági lista:

$v_1: v_2, v_2, v_3, v_5, v_{10}$ ← v_1-ből ezekbe a csúcsokba menő élek, ha egy csúcsba több él is megy, akkor az többször szerepel a listában

$v_2: v_3, v_5, v_{10}$

$v_3: \dots$

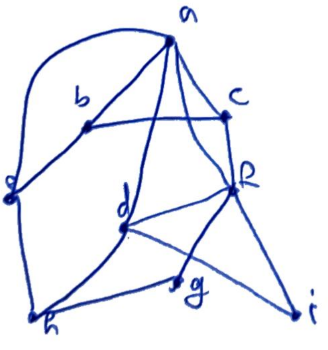
$\vdots$

Algoritmusok futásideje

vagy $c\cdot(n+m)^k$

futásidő felülbecsülhető $c\cdot s^k$-val, ahol s az input mérete, és c, k konstansok, amik az adott algoritmusra jellemzőek.
(n: csúcsok száma, m: élek száma)

BFS:



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	a	b	c	e	d	f	h	i	g
t	0	1	1	1	1	1	2	2	2
m	*	a	a	a	a	a	e	d	f

futásidő: $\forall$ csúcs szomszédsági listáján egyszer megy végig
(szomszédsági lista hossza: $2m$)

lépésszám: $\leq c\cdot(m+n)^1 \to$ lineáris

(9)

<u>Def</u> G gráfnak F részgráfja feszítőfa, ha

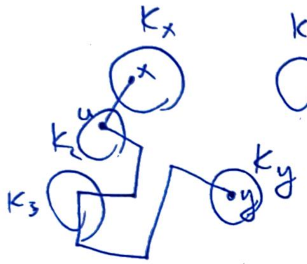
1, fa

2, $V(F) = V(G)$

<u>Tétel</u> G-ben van feszítőfa $\Leftrightarrow$ G összefüggő

$\Rightarrow$: triviális.

$\Leftarrow$ kiindulás: G csúcsait tartalmazó gráf (élek nélkül)



K_x-ben legyen majd a feszítőfa

$\rightarrow \exists\ x \rightsquigarrow y$ út (mivel öf.) (x és y különböző komponensben van)

vegyük az út legelső nem K_x-beli élét, és vegyük hozzá a feszítő fához. Ettől nem lesz benne kör, mivel különböző komponensben voltak.

Ezt addig ismételjük, amíg feszítőfát nem kapunk.

<u>Minimális összsúlyú feszítőfa</u>

adott: G gráf, $w(e): e \in E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény

F minimális összsúlyú feszítőfa, ha $\sum w(e): e \in E(F)$ minimális

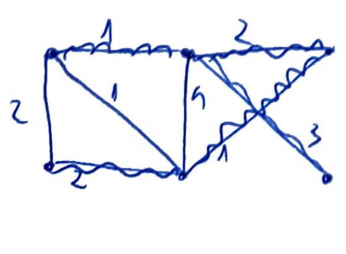
<u>Kruskal alg.</u> (mohó algoritmus)

Minimális összsúlyú feszítőfa keresése:

1. kiindulás: G csúcsait tartalmazó gráf (élek nélkül)

2. (egyesít) legkisebb súlyú él kiválasztása, ami két komponens között megy

3. ha már nincs ilyen, készen vagyunk



Biz (Mohó alg. legkisebb összsúlyú feszítőfát generál)

$\longrightarrow$ súly szerint: sorbarendezés

	e_1	e_2	e_3	...	e_k	e_{k+1}	.. e_m
$F_{mohó}$	1	1	0	1	1		
F_{opt}	1	1	0	1	0		

$\underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{F_0}$

Vegyük azt a minimális összsúlyú feszítőfát, ami legtovább egyezik mohóval

1, mohó nem választotta, de opt-ban benne van: mohó nem választotta, mivel kör keletkezett volna tőle $\Rightarrow$ F_{opt}-ba van kör ↯

2, mohó beválasztotta, de opt nem: $e_k = \{u, v\}$

F_{opt} feszítőfa (és nem tartalmazza e_k-t) $\Rightarrow$ F_{opt}-ba van út u-ból v-be. Az út egyik éle legyen e_ℓ, ami $e_\ell \notin \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$. Létezik ilyen, mivel ha nem létezne, akkor mohó nem választotta volna e_k-t, mert kör lett volna belőle. Mivel $k < \ell$, ezért $w(e_k) \leq w(e_\ell)$

$F^* = F_{opt}$-ban e_ℓ-t e_k-ra cserélve. F^* összsúlya $\leq$ F_{opt} összsúly.

Mivel F_{opt} minimális összsúlyú, ezért $=$

F^* feszítőfa, mivel összefüggő (e_k hozzáadásával kört hoztunk létre, amit e_ℓ törlésével meg is szüntettünk), ezért tartalmaz feszítőfát, ami n-1 élű, de F^* is n-1 élű, azaz F^* feszítőfa.

Így F^* tovább egyezik $F_{mohó}$-val, mint F_{opt}, azaz F_{opt}-ot rosszul választottuk meg ↯

(5)

Hamilton-kör: egyszerű gráf minden csúcsát tartalmazó kör

Hamilton-út: egyszerű gráf minden csúcsát tartalmazó út

Tétel Ha G gráfban van Hamilton-út, akkor $k \geq 1$ csúcs törlésével legfeljebb $k+1$ különböző komponensre esik szét.

Ha G gráfban van Hamilton-kör, akkor $k \geq 1$ csúcs törlésével legfeljebb k különböző komponensre esik szét.

Biz H-kör, k csúcs törlés → max. k db körív → max. k komponens

H-út, k csúcs törlése → max. $k+1$ db körív → max. $k+1$ komponens.

Tétel (Dirac) G egyszerű gráf, ≥ 3 csúcsú

Ha $\forall d(v_i) \geq \frac{n}{2}$, akkor a gráfban van H-kör

Tétel (Ore) G egyszerű gráf, ≥ 3 csúcsú

Ha bármely $u, v \in V(G): \{u,v\} \notin E(G): d(u)+d(v) \geq n$, akkor G-ben van H-kör

Biz (Ore) Legyen $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tetszőleges permutáció

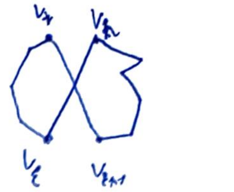
Legyen $e(\pi)$ az $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ élek közül a $E(G)$-ben lévők száma

Cél: $e(\pi) = n \rightarrow \pi$ kijelöl egy H-kört

alg.: $\pi \rightsquigarrow \pi' : e(\pi) < e(\pi')$

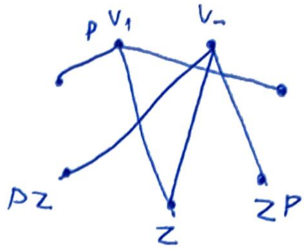
Ha $e(\pi) \neq n$, akkor van benne olyan pár, ami nincs G-ben, ez legyen $\{v_1, v_k\} \notin E(G)$

Cél: k keresése, hogy $\{v_1, v_{k+1}\} \in E(G)$ és $\{v_k, v_n\} \in E(G)$



Legyen $Z := \{v_i : \{v_i, v_n\} \in E(G)\}$

$P := \{v_j : \{v_{j-1}, v_1\} \in E(G)\}$



$|Z| = d(v_n)$ $\quad |P| = d(v_1) \longrightarrow |Z| + |P| \geq n$

v_n nincs kiszámezve $\rightarrow$ van olyan csúcs, ami $\underline{v_k \in P \cap Z}$

Biz (Dirac): Ore tételből triviálisan következik

— • —

Euler-séta: olyan séta, amely a gráf minden élét érinti (egyszer)

Euler-körséta: olyan körséta, amely a gráf minden élét érinti (egyszer)

Tétel: G összefüggő gráfban van Euler-körséta $\Leftrightarrow$ $\forall$ fokszám páros

séta $\Leftrightarrow$ 2 kivétellel

Biz $\Rightarrow$ séta: kezdő és végcsúcs fokszáma: 2× áthaladásos száma + 1 (amikor elindult vagy véget ért)

többi csúcs: 2× áthaladások száma

körséta: ↑ kezdő + végcsúcs: 2× áth. sz. + 1 (elindulás) + 1 (végzés)

Lemma: G gráf $\forall$ fokszám ps. G-ben vaktában séta (elakadásig): $u \rightsquigarrow v \Rightarrow v = u$

elakadt x-ben $\Rightarrow$ x: 2× áthaladásos szám + 1 (mert ott megakadt)

x fokszáma ps $\Rightarrow$ van él, ami x-re illeszkedik, és még nem jártuk be.

— • —

Legyen P körséta $v \in V(G) \rightsquigarrow v$, u: aktív csúcs $= v$

Ciklus:
- vaktában séta nem P-beli élekben elakadásig (u)
- séta beszúrása P-be u egy előfordulásánál
- ha Euler-körséta: ✓
- u: olyan csúcs, amire illeszkedik P-beli és nem P-beli él is →

Ciklus vége

- e: P-beli él
- f: nem P-beli él
- x: egyik rá illeszkedő csúcs
- y: —〃—

$x = y$ ✓

$x \rightsquigarrow y$ út

↳ lesz olyan csúcs, ahol ...

— • —

séta: új él felvétele páratlan fokszámú csúcsok közé! (ha van)

⑥

G gráf csúcsai k színnel színezhetőek, ha a csúcsok megszínezhetőek úgy k színnel, hogy bármely két szomszédos csúcs különböző színű

G kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel színezhető, de $(k-1)$-el már nem

---

G klikkszáma $\omega(G) = k$, ha van benne k db csúcs, amelyek között bármely kettő szomszédos, de $(k+1)$ már nincs

Áll: $\omega(G) \leq \chi(G)$

Biz: $\omega(G)$ csúcsú klikk (teljes gráf) $\omega(G)$ színnel színezhető, ezért a G gráf is legalább $\omega(G)$ színnel színezhető.

Mohó színezés

Input: G gráf, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok sorrendje

$c(v_1) \leftarrow 1$, $C \leftarrow 1$

ciklus 1-től n-ig (i)

$t \in \{1, 2, \ldots, C, C+1\}$ közül legkisebb t-t választ, hogy v_i-nek ne legyen t színű szomszédja

$c(v_i) = t$

ha $t = C+1$, akkor C++;

}

Áll: Mohó alg. max. $\Delta(G)+1$ színt használ, ahol $\Delta(G)$ a gráf maximális fokszáma

Biz: Egy csúcsnak max $\Delta(G)$ szín nem lehet jó

Köv.: $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

Biz: mohó

Def.: intervallumgráf: $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallumok

$V(G) = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ I_i szomszédos I_j-vel $\Leftrightarrow I_i \cap I_j \neq \emptyset$

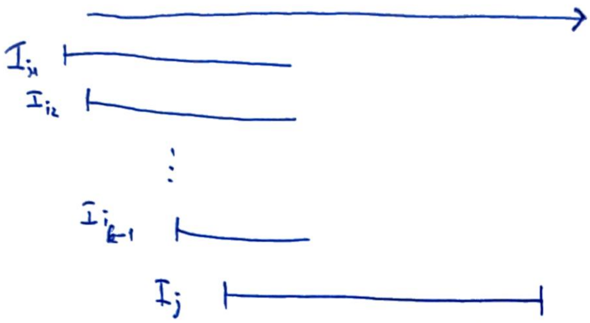
Ezekkel izomorf gráfokat nevezzük intervallumgráfnak

<u>Tétel</u> G intervallumgráf: $I_1, I_2, \dots, I_n$

Mohó alg: G, intervallumok bal vége szerint növelő sorrendbe rendezett csúcsos

↳ $\chi(G)$ színnel színezi a gráfot

<u>Biz</u>: cél $k \le \omega(G) \le \chi(G) \le k$



①, ②, ..., (k-1), (k) ← színek

I_j: először (k)-ra színezett int.

I_j nem kapott ①, mert van ① színű int. átfedésben: I_{j1}

⋮

I_j nem kapott (k-1) színű mert ...

$I_{j1}, I_{j2}, \dots, I_{jk-1}, I_j$ k csúcsú teljes algráf $\Rightarrow k \le \omega(G)$

<u>Köv</u> G intervallumgráf: $\omega(G) = \chi(G)$

<u>Def</u> Páros gráf: G páros gráf, ha $V(G)$ felbontható A és B halmazokra, úgy, hogy a gráf ~~élei~~ minden éle A-beli csúcsot köt össze B-belivel, azaz $\chi(G) \le 2$

<u>Tétel</u> G páros gráf $\Longleftrightarrow$ G nem tartalmaz ptlan kört

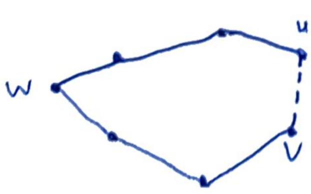
<u>Biz</u> $\Rightarrow$ triv. ✓

$\Leftarrow$ <u>BFS</u> v piros, $\Longleftrightarrow t(v)$ páros | v kék, ~~mert~~ $\Longleftrightarrow t(v)$ páratlan

$e = \{u, v\} \in E(G) \Rightarrow |t(u) - t(v)| \le 1$ | (ha $|t(u) - t(v)| = 1$, akkor nem sérül a feltétel)

Ha $t(u) = t(v)$, akkor u és v nem lehet szomszédos

↳ u és v közös ősének keresése $\Rightarrow t(u) - t(w) = t(v) - t(w) \Rightarrow$ u és w távolsága megegyezik v és w távolságával



↳ ezt $\{u, v\}$ éllel kiegészítve páratlan kört kapunk ↯

Def $M \subseteq E(G)$ egy párosítás / független élhalmaz G-ben, ha G bármely csúcsára legfeljebb egy él illeszkedik M-ből

$\nu(G)$: G-beli legnagyobb párosítás mérete

Def $X \subseteq V(G)$ egy lefogó ~~ponthal~~ ponthalmaz G-ben, ha G minden élének legalább egyik végpontja X-beli

$\tau(G)$: legkisebb lefogó ponthalmaz mérete

Áll: M párosítás, X lefogó ponthalmaz $\Rightarrow |M| \leq |X|$

Biz M minden éléhez legalább egy X-beli pont tartozik, hogy le legyen fogva, mivel M élei függetlenek

Def $X \subseteq V(G)$ független ponthalmaz, ha semelyik két X-beli pont nem szomszédos

$\alpha(G)$: legnagyobb független ponthalmaz mérete

Def $Z \subseteq E(G)$ lefogó élhalmaz G-ben, ha G minden csúcsa legalább egy Z-beli élre illeszkedik

$\rho(G)$: legkisebb lefogó élhalmaz mérete

Áll: Minden G gráfra: $\nu(G) \leq \tau(G)$

Biz: M párosítás, X lefogó ponthalmaz $\Rightarrow |M| \leq |X|$ $\quad |M| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |X|$

Áll: Minden (izolált pontot nem tartalmazó) G gráfban: $\alpha(G) \leq \rho(G)$

Biz Legyen Z lefogó élhalmaz, X független ponthalmaz. Z lefogó élhalmaz, ezért X minden pontja illeszkedik Z-beli élre, de egy Z-beli élre csak egy pont illeszkedhet X-ből, mivel X független ponthalmaz $\Rightarrow |X| \leq |Z| \Rightarrow \alpha(G) \leq \rho(G)$

Áll: ~~$X \subseteq V(G)$ lefogó ponthalmaz~~ $X \subseteq V(G)$ lefogó ponthalmaz $\Leftrightarrow V(G) \setminus X$ ftlen ponthalmaz

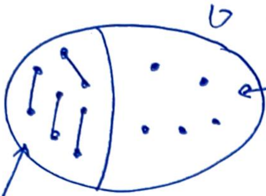
$\forall$ él egyik vége X-beli

Köv: $\alpha(G) + \tau(G) = n$ (Gallai)

Tétel (Gallai): G gráfban ha nincs izolált pont: $\nu(G)+\varrho(G)=n$

Lemma G n csúcsú, izolált pontot nem tartalmazó gráf, k egész ≥ 0

1. $\exists$ k elemű párosítás G-ben $\Rightarrow$ $\exists \leq n-k$ elemű lefogó élhalmaz G-ben



$n-2k$ csúcs, lefoglaló $\leq n-2k$ éllel

$\rightarrow$ |lefogó élhalmaz| $\leq n-2k+k = \underline{n-k}$

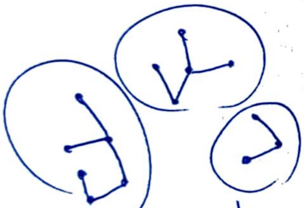
k elemű párosítás, 2k csúcs

2. $\exists$ k elemű ~~párosítás~~ lefogó élhalmaz G-ben $\Rightarrow$ $\exists \geq n-k$ elemű párosítás G-ben

↳ Legyen ez Z

$H := (V(G), Z)$

c legyen a legalább 2 csúcsú komponensek száma H-ban



$\leftarrow$ élszám = csúcsszám = 1

↳ összefüggő, ezért élszám $\geq$ csúcsszám -1

összesen: élszám $\geq$ csúcsszám $- c$ $\rightsquigarrow$ $k \geq n-c$ $\rightsquigarrow$ $c \geq n-k$

Minden legalább 2 csúcsú komponensből válasszunk egy élt, ezek függetlenek, mivel különböző komponensből származnak

|független élhalmaz| $\geq n-k$

Biz. M maximális párosítás $|M| = \nu(G) \overset{1.}{\rightsquigarrow} \exists \leq \nu(G)-n$ élű lefogó élhalmaz

$\varrho(G) \leq \nu(G)-n \rightarrow \underline{n \leq \varrho(G)+\nu(G)}$

Z minimális lefogó élhalmaz $|Z| = \varrho(G) \overset{2.}{\rightsquigarrow} \exists \geq \varrho(G)-n$ élű ftlen él.

$\nu(G) \geq \varrho(G)-n \rightarrow \underline{n \geq \varrho(G)+\nu(G)}$

$\Downarrow$

$\underline{\varrho(G)+\nu(G)=n}$

	max ftlen	min lefogó
él	$\nu(G)$	$\varrho(G)$
csúcs	$\alpha(G)$	$\tau(G)$

8

Párosítás páros gráfban: „A" pontosztály elemeihez rendeli hozzá „B" pontosztály elemeit.

<u>Javítóutas algoritmus</u>   input: G páros gráf → A és B pontosztályok

output: M párosítás, amire $|M|$ maximális.

$M \leftarrow$ tetszőleges párosítás (pl. $\emptyset$)

ciklus

P javítóút keresése M-re nézve

Ha nincs ilyen: stop

$M \leftarrow M \setminus \{P \text{ párosadik élei}\} \cup \{P \text{ páratlanadik élei}\}$

vége

<u>Def</u> javítóút: - párosítatlan A-beli csúcsból indul
- minden párosadik éle M-beli
- párosítatlan B-beli csúcsban ér véget

→ módosított BFS: - egyszerre minden A-beli párosítatlan csúcsból indul
- Ha $t(u)$ páros, akkor csak nem M-beli élen halad, ha páratlan, akkor csak M-belin
- nincs javítóút, ha BFS nem ér el párosítatlan B-beli csúcsot

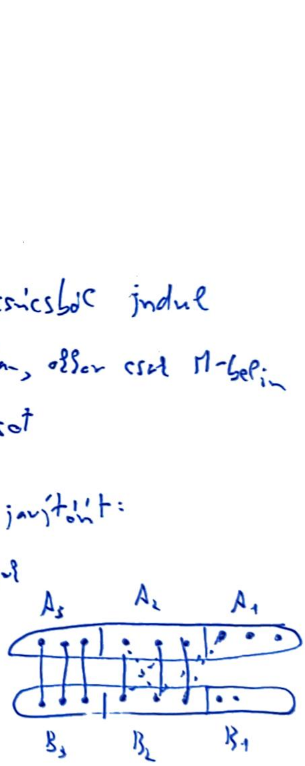
<u>Lemma</u> Tfh. G ps. gráfban M párosításra nézve nincs javítóút:

(1) Legyen A_1 és B_1 a párosítás által nem fedett csúcsok

(2) Legyen A_2 az „A"-ból alternáló úton elérhető csúcsok

(3) B_2 az A_2 párjai

(4) A_3, B_3: maradék



Ekkor G-nek nincs $A_1 \cup A_2 - B_1 \cup B_3$ éle

<u>Biz</u> Tfh $\exists\, e = \{a, b\}$ ..

1: $a \in A_1$, $b \in B_1$: nem lenne a és b párosítatlan, mivel G-ben nincs javítóút ↯ ✓

2: $a \in A_1$, $b \in B_3$: alternáló úton elérhető lenne A_3 ↯

3: $a \in A_2$, $b \in B_1$: a elérhető alternáló úton A_1-beli csúcsból, így a–b javítóút utolsó szakasza lenne, ami nem megengedett ↯

4: $a \in A_2$, $b \in B_3$: B_3-beli csúcs elérhető lenne alternáló úton, ami A_3-beli csúcsát is elérhetővé tenné; alternáló úton ↯

<u>Tétel</u> Ha G ps gráfban M-re nézve nincs javítóút, akkor M max. pár.

	$A_1 \cup A_2$	A_3
$B_1 \cup B_3$	×	✓
B_2	✓	✓

<u>Biz</u>: $|M| = \tau = \nu(G)$ → cél: τ elemű lefogó ponthalmaz keresése: $A_3 \cup B_2$

$A_3 \cup B_2$ M minden élére pontosan egyszer illeszkedik

Tétel (König) Minden Ps gráfra: ~~∀~~ $\nu(G) = \tau(G)$

Biz előző tételből triviálisan következik

$\leftarrow$ Biz: $\searrow$

Köv.: Gallai: $\nu(G) + \rho(G) = n$; $\alpha(G) + \tau(G) = n$; König: $\nu(G) = \tau(G) \rightarrow \alpha(G) = \rho(G)$

Tétel (Hall) G páros gráfban létezik A-t fedő párosítás $\Longleftrightarrow \forall X \subseteq A: |N(X)| \geq |X|$

Biz $\Rightarrow$ ✓ triv. $\Leftarrow$: $\xrightarrow{\text{alg.}}$ M párosítás

M fedi: A-t : ✓ , ha nem: (lemma jelölései)

$X := A_1 \cup A_2 \rightarrow N(X) = B_2$

$|X| \geq |N(X)| \longrightarrow |A_1| + |A_2| \geq \overset{|A_2|}{\overset{\parallel}{|B_2|}} \rightarrow$ feltétel sérül ✓ ↯ $\square$

Tétel (Frobenius)

G ps gráfban van teljes párosítás $\Longleftrightarrow |A| = |B|$ és $\forall X \subseteq A: |X| \leq |N(X)|$

Biz $\Rightarrow$ triviálisan látszik

$\Leftarrow$ $|A| \neq |B|$ nem lehet teljes párosítás

~~Hall~~ Hall-tétel ✓

⑤

Tétel G ps gráf d reguláris $(d \geq 1) \Rightarrow \exists$ teljes párosítás

Biz $\forall$ él A egyik csúcsában végződik (mivel ps), ezért $|E(G)| = d \cdot |A|$ (B-re szintén) $|E(G)| = d \cdot |B| \Rightarrow d \cdot |B| = d \cdot |A| \Rightarrow |A| = |B|$

Legyen $X \subseteq A$, ekkor legyen E_X az X-re illeszkedő élek halmaza

$|X| \cdot d = |E_X|$ $N(X)$-re nem csak E_X-beli élek illeszkednek, de egy csúcsra legfeljebb $d \Rightarrow |E_X| \leq d \cdot |N(X)| \Rightarrow d \cdot |X| \leq d \cdot |N(X)| \Rightarrow |X| \leq |N(X)|$ ✓

Def G gráf élei $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ színnel színezhetőek, ha G minden éle kiszínezhető k különböző szín használatával úgy, hogy bármely két szomszédos él különböző színű legyen.

Def G gráf élkromatikus száma $\chi_e(G) = k$, ha k színnel színezhető, de $(k-1)$-el már nem

Áll $\forall$ hurokélmentes G gráfra $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$

Biz $\Delta(G)$ fokú csúcsba $\Delta(G)$ db él fut be amiket mind különböző színűnek kell lennie.

Tétel (Vizing) $\forall G$ egyszerű gráfra $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$ **Biz** $\emptyset$

Köv: $\forall G$ egyszerű gráfra: $\chi_e(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\}$

Tétel (König) $\forall G$ ps gráfra: $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Biz Legyen $d = \Delta(G)$ $d=0 \Rightarrow \chi_e(G) = 0$ triv.

1. eset: G d-reguláris $\rightarrow$ előző tétel szerint van benne teljes párosítás: Legyen ez M_1. Legyen M_1 ① színű. Távolítsuk el M_1-et G gráfból $\rightarrow$ $\rightarrow G$ ekkor $(d-1)$ reguláris $\rightarrow \ldots$ d lépés után $d-d=0$, összesen d db teljes párosítást színeztünk ki d db színnel ✓

2. eset G nem d-reguláris $G \rightsquigarrow G'$ d-reguláris

$|A| \neq |B| \to$ A vagy B kiegészítése új csúcsokkal

→ Válasszunk tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ csúcspontot, hogy $d(a) < d$ és $d(b) < d$, ~~melyek között~~ $\to \{a, b\}$ él hozzáadása (akkor is ha már volt ilyen)

ism., amíg lehet $\to$ A vagy B csúcsai közül mindegyik foka d →

→ legyen ez A, ekkor $m = d \cdot |A|$ (mert $\forall$ él pontosan egyik végpontja A-beli)

B fokszámai max d lehetnek (kezdetben $d = \Delta(G)$ és alg. mindig $d(b) < d$ csúcsot választott)

Tfh. B-ben van d-nél kisebb fokszámú csúcs $\Rightarrow$ $m < d \cdot |B|$

de $|A| = |B|$ $\Rightarrow$ $d \cdot |A| = d \cdot |B|$ $\Rightarrow$ ellentmondás ↯

B $\forall$ foka d $\Rightarrow$ G' d-reguláris $\Rightarrow$ 1. eset

(10)

Def: Hálózat: Adott G gráf, $s,t \in V(G)$ $s \neq t$, $c(e)$ kapacitás fv. $E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

A (G,s,t,c)-t hálózatnak nevezzük

Def: Folyam: $f: E(G) \to \mathbb{R}$: $\forall e \in E(G): 0 \leq f(e) \leq c(e)$ és $\forall$

G $\forall$ csúcsára: $\sum_{e:\leftarrow} f(e) = \sum_{e:\to} f(e)$ (folyammegmaradás) (s-re és t-re nem ir.)

Def: Folyam értéke: $m_f = \sum_{e:\to} f(e) - \sum_{e:\leftarrow} f(e)$

Def: Vágás: Adott hálózatban $X \subseteq V(G)$-t $\overset{s\text{-}t}{\downarrow}$ vágásnak nevezzük, ha $s \in X$ és $t \notin X$

Def: Vágás kapacitása: $c(X) = \sum_{e:\, X \to} c(e)$

Def: Legyen f folyam (G,s,t,c) hálózatban. Ekkor H_f segédgráf:
- $V(H_f) = V(G)$
- $e=\{u,v\}$ él előreél, ha $f(e) < c(e)$, akkor e bekerül H_f-be
- $e=\{u,v\}$ él visszaél, ha $0 < f(e)$, akkor $e' = \{v,u\}$ bekerül H_f-be

Def: Javítóút: H_f-ben s-ből t-be menő irányított utat javítóútnak nevezzük

Javítóutas alg. input (G,t,s,c) hálózat, kimenet: f maximális folyam

$f(e) \leftarrow 0$ $\forall e$-re (vagy kiinduló folyam

ciklus

javítóút keresése H_f-ben BFS segítségével

ha nincs $\to$ végeztünk, H_f-ben s-ből elérhető csúcsok minimális vágást alkotnak

ha van $\to$ δ kiválasztása, úgy, hogy $f(e)+\delta \leq c(e)$ $\forall$ előreélre és $f(e)-\delta \geq 0$ $\forall$ visszaélre

$f(e)$ ~~értéket~~ módosítása δ szerint

vége

All: f folyam δ-val javítása után is folyam marad

Biz: $\xrightarrow{e} v \xrightarrow{f}$ 4 különböző eset vizsgálata

1. eset e és f is előreél $\xrightarrow{f+\delta \;\vee\; f+\delta}$ bemenő és kimenő mennyiség is δ-val nő

2. eset e előreél és f visszaél $f+\delta \quad f-\delta$ egyik élen δ-val több, másik élen δ-val kevesebb

3. eset e visszaél és f előreél —— " ——

4. eset e és f is visszaél $f+\delta \quad f-\delta$ —— " ——

<u>Áll</u> f tetsz. folyam, X s-t vágás: $m_f = \sum_{e:\,X\rightarrow} f(e) - \sum_{e:\,X\leftarrow} f(e)$

<u>Biz</u> s: $m_f = \sum_{e:\,s\rightarrow} f(e) - \sum_{e:\,s\leftarrow} f(e)$ $\forall$ nem s X-beli csúcs: $0 = \sum_{e\rightarrow} f(e) - \sum_{e\leftarrow} f(e)$

(+) X-en belüli éleket egyszer ⊕-al, egyszer ⊖-al számoljuk, ezért ezek kiesnek, többi él megmarad.

<u>Áll</u> X tetsz. vágás és f tetsz. folyam: $c(X) \geq m_f$

<u>Biz</u> $m_f = \sum_{e:\,X\rightarrow} f(e) - \sum_{e:\,X\leftarrow} f(e) \leq \sum_{e:\,X\rightarrow} c(e) - 0 = c(X)$

<u>Tétel</u> Ha H_f-ben nincs irányított út s-ből t-be, akkor f maximális

<u>Biz</u> $X :=$ H_f-ben s-ből elérhető csúcsok

X-ből kilépő élek: $f(e) = c(e)$, ha nem így lenne, akkor H_f-ben lenne előreél, és elérhető lenne X-en kívüli csúcs is.

X-be belépő élek: $f(e) = 0$, mivel nincs visszaél...

így: $m_f = \sum_{e:\,X\rightarrow} c(e) - \sum_{e:\,X\leftarrow} 0 \leq \sum_{e:\,X\rightarrow} c(e) - 0 = c(X) \rightarrow m_f = c(X) \Rightarrow$ előző áll. szerint folyam maximális

<u>Tétel</u> (Edmonds-Karp) hálózatban maximális folyam kereső algoritmust futtatva, H_f-ben mindig a legrövidebb javítóutat választva (BFS-sel), legfeljebb $n \cdot m$ javítás után leáll az alg. <u>Biz</u> $\emptyset$

<u>Tétel</u> (Ford-Fulkerson) Bármely hálózatban: $\max m_f = \min c(X)$ X: vágás

<u>Biz</u> Alg $\rightsquigarrow m_f$, $X :=$ H_f-ben s-ből elérhető csúcsok $\Rightarrow$ előző tétel $\Rightarrow$

$m_f = c(X) = d \Rightarrow \max m_f \geq d, \ \min c(X) \leq d$

$d \leq \max m_f \leq \min c(X) \leq d \Rightarrow \max m_f = \min c(X)$

<u>Lemma</u> (egész) $c(v) \in \mathbb{N} \rightarrow \exists$ max m_f: $\forall f(v) \in \mathbb{N}$ <u>Biz</u> alg $\forall$ egész δ-val javít

<u>Általánosítás</u>: több forrás/nyelő $\rightarrow$ 1 forrás/nyelő hozzáad $\rightarrow$ ezeket ∞ élekkel | irányítatlan él $\rightarrow$ 2 ellentétes irányú él

csúcsok kapacitása $\rightarrow$ csúcs szétválasztás $\rightarrow$ összekötés kapacitása

11

Def: éldiszjunkt utak: G irányított gráfban $s \in V(G)$-ből $s \neq t \in V(G)$-be k éldiszjunkt út van, ha semelyik kettőnek nincs közös éle

Def: ~~pontdi~~ pontdiszjunkt út: pont...

Lemma f folyam, $m_f \overset{k\ \text{egész}}{\geq} k \geq 1$, $f(e) \in \{0,1\}$ $\forall e \in E(G)$ $\Big\} \Rightarrow \exists\ k$ db éldiszjunkt út, aminek $\forall$ élére $f(e)=1$

Biz: $k=0$ triviális

$k \geq 1$, P: séta valahol, t-ben fog elakadni, mivel $v \neq s,t$ csúcsokra a belépő és kilépő élek száma megegyezik

P-ből ismétlődő részek törlése $\to$ P út $s \to t$

P élein $f(e)=0$ $\to$ m_f eggyel csökken

Ha $m_f > 1$, akkor mégegyszer ugyanez

$\hookrightarrow \exists\ k$ db éldiszjunkt út

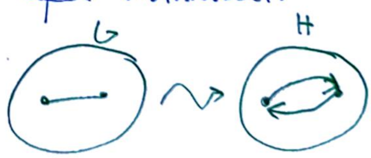
Def G irányított gráfban $Z \subseteq E(G)$ lefogja az s-t utakat, ha minden út tartalmaz legalább egy Z-beli élet

Lemma Legyen G irányítatlan/ir. gr. s,t... $k \geq$ egész. Ekkor ~~egyen~~ ekvivalensek:

(1) $\exists\ k$ db éldiszjunkt s-t út

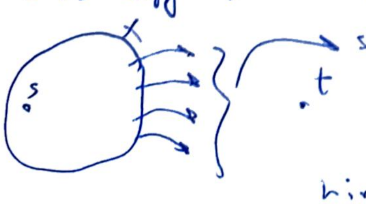
(2) $\nexists\ (k-1)$ élű s-t utakat lefogó élhalmaz

(3) $(G^H, s, t, c \equiv 1)$ hálózatban a max folyam $\geq k$



Biz (1) $\Rightarrow$ (2) $P_1, \dots, P_k$ éldiszjunkt utak, Z: s-t utakat lefogó ponthalmaz, Z legalább 1 élet tartalmaz $P_1, P_2, \dots, P_k$-ból, mert ezek éldiszjunktak $\Rightarrow |Z| \geq k$ ✓

(2) $\Rightarrow$ (3) Legyen X tetszőleges s-t vágás H-ban



$\to$ s-t utakat lefogják, minimum k van belőlük

$\Downarrow$

$c(X) \geq k$

Ford-Fulk.

min vágás $\geq k \Rightarrow$ max folyam $\geq k$ ✓

B) ⇒ (1)

Lemma

Egér ⇒ ∃ k folyam, amire $\forall f(e) \in \{0,1\}$ ⇒ ∃ k éldiszjunkt s-t út

Def
$\lambda_G(s,t)$: s-t éldiszjunkt utak maximális száma
$\lambda'_G(s,t)$: s-t utakat lefogó élhalmaz minimális elemszáma

Köv.: (Menger éldiszjunkt utakra) $s,t \in V(G)$, $s \neq t$

Minden G gráf: $\lambda_G(s,t) = \lambda'_G(s,t)$

Biz $k \geq 1$ tetsz. egész

$\lambda_G(s,t) \geq k$ ⟺ van k db s-t éldiszjunkt út
$\lambda'_G(s,t) \geq k$ ⟺ ∄ $(k-1)$ élű s-t utakat lefogó élh.

Def $Y \subseteq V(G)$ csúcshalmaz lefogja a G-beli s-t utakat ($s,t \notin Y$), ha bármely útnak van Y-beli csúcsa

Tétel G irányított/irányítatlan gráf, $k \geq 1$ egész, $s,t \in V(G)$, $s \neq t$ $\{s,t\} \notin E(G)$
Ekvivalensek: (1) ∃ k db pontdiszjunkt s-t út
(2) ∄ $(k-1)$ csúcsú, az s-t utakat lefogó ponthalmaz
(3) $(H, s, t, c \equiv 1)$ hálózatban max folyam $\geq k$

Biz ∅

Def.
$K_G(s,t)$: s-t pontdiszj. utak max. száma
$K'_G(s,t)$: s-t utakat lefogó pontok min. száma

Köv (Menger pontdiszj.) G gráf, $s,t \in V(G)$, $s \neq t$ $\{s,t\} \notin E(G)$
$K_G(s,t) = K'_G(s,t)$

Def G irányítatlan gráf, $k \geq 1$ egész
- G k-szorosan élösszefüggő, ha $(k-1)$ élet akárhogyan törölve összefüggő marad
- G k-szorosan pontösszefüggő, ha $(k-1)$ pontját törölve öf. marad (vagy k-szorosan öf.) és $k+1$ csúcsa van

Tétel (Menger) G irt. g., $k \geq 1$ egész
(i) G k-élöf. ⟺ bármely 2 csúcs között ∃ k éldiszj. út
(ii) G k-(pont)öf ⟺ —||— pontdiszjunkt, és $|V(G)| \geq k+1$

Biz (i) ⇒ s,t tetszőleges, s-t utak nem foghatók le $\leq k-1$ éllel, mert $\leq k-1$ él törlésével elrontható az öf. I ⇒ ∃ k db éldiszjunkt s-t út

Biz (i) ⇐ $k-1$ él $\boxed{\text{DEL}}$
u és v közötti k éldiszjunkt útból ≥ 1 érintetlen ⇒ u-v út ∃ (tetsz. u-v-re)
G öf.

(12)

Legrövidebb út feladat:

adott: G ir. gráf, w konzervatív súlyfv., $s \in V(G)$

P út hossza: $w(P) = \Sigma\{w(e) : e$ P-n van$\}$

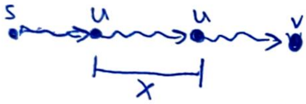
$t(v) = \min\{w(P) : P$ $s \rightsquigarrow v$ út$\}$

Output: $\forall v \in V(G)$: $t(v)$, $m(v)$ ← legrövidebb út megelőző csúcs

Def w súlyfv. konzervatív, ha nincs benne irányított, negatív összsúlyú kör

Áll: w konzervatív, Q élsorozat $s \to v$, $w(Q) = t$, ξ élű $\Big\}$ $\Rightarrow \exists P$ $s \to v$ út, $w(P) \le t$, $\le \xi$ élű

Biz



ismétlődő szakasz kivágása ($\to Q'$), mivel w konzervatív, ezért $w(X)$ nem-negatív, ezért $w(Q') \le w(Q)$ $\rightsquigarrow$ amíg van benne ism. ... P út...

Áll P út $s \rightsquigarrow v$, w konzervatív, P legrövidebb $s \to v$ út

$P_u :=$ $s \to u$ út $\Rightarrow$ P_u legrövidebb $s \to u$ út

Biz (ind.) tfh Q legrövidebb út $s \to v$, ekkor

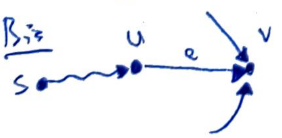
$w(s \overset{Q}{\rightsquigarrow} u \rightsquigarrow v) \le w(P)$ ↯ mivel P legrövidebb

Def: $m(v) :=$ $s \to v$ legrövidebb út utolsó előtti ~~eleme~~ csúcsa

Def $t_\xi(v)$: $s \rightsquigarrow v$ $\le \xi$ élű utak/élsorozatok közül a legrövidebb hossza

Áll $t_\xi(v) = \min\{t_{\xi-1}(u) + w(e) : e = (u, v)\}$, w konzervatív súlyfv.

Biz



P: e-n megérkező $\le \xi$ élű élsorozatok/utak közül a legrövidebb

P_u: $\le \xi - 1$ élű $s \rightsquigarrow u$ utak/éls. közül a legrövidebb

Bellman-Ford alg.: input: G ir. gráf, w súly fv. $s\in V(G)$ csúcs

$t_0(s)=0$, minden más $t_0(v)=\infty$
minden $v\in V(G)$, $v\neq s$-re $m_0(v)=*$
ciklus k: 1-től (n-1)-ig:
  $t_k(s)=0$;
  ciklus: v: $V(G)\setminus\{s\}$
    $t_k(v)=t_{k-1}(v)$
    $m_k(v)=m_{k-1}(v)$
    ciklus: e: v-be belépő élek ($e=\{u,v\}$)
      ha $t_k(v)>t_{k-1}(v)+w(e)$, akkor $t_k(v)=t_{k-1}(v)+w(e)$, $m_k(v)=u$;
    cv
  cv
cv
$\forall\, v\in V(G)$ csúcsra: $t(v)=t_{n-1}(v)$, $m(v)=m_{n-1}(v)$

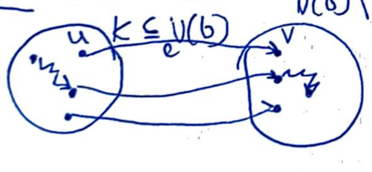
Lépésszám: belső 2 ciklus $\forall$ csúcs $\forall$ élen végigmegy, legfeljebb $c\cdot m$ idő
külső ciklus $(n-1)$-szer fut le, így összesen $c\cdot n\cdot m$ idő alatt fut le.

Áll: $\exists$ s-ből elérhető negatív kör $\Longleftrightarrow$ $\exists\, v$: $t_n(v)<t_{n-1}(v)$

Biz $\Leftarrow$ alg. leges | $\Longrightarrow$ sosem stabilizálódik.

Dijkstra $\forall e$: $w(e)\geq 0$

Áll

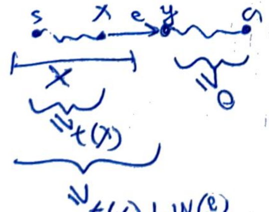


$\forall v\notin K$: $t'(v)=\min\{t(u)+w(e): e=\{u,v\}, u\in K\}$

Legyen „a" olyan csúcs, hogy $a\notin K$ és $t'(a)=\min\{t'(v): v\notin K\}$

Akkor $t(a)=t'(a)$

Biz $t'(a)$ út van $s\to a$, P tetsz. út K-t az $e=(x,y)$ élen hagyja el



$t'(y)=\min\{t(x)+w(e): e=(x,y), x\in K\}$

$w(P)\geq t(x)+w(e)\geq t'(y)\geq t'(a)$

Alg: input: n csúcsú G gráf, $w(e)\geq 0$ $\forall e$, $s\in V(G)$
$t(s)=0$, $t(v)=\infty$ $\forall v\in V(G)$, $v\neq s$. $m(v)=*$, $K=\{s\}$, $a=s$
ciklus amíg $K\neq V$
  ciklus: $e=(a,v)$, $v\notin K$
    ha $t(v)>t(a)+w(e)$, akkor $t(v)=t(a)+w(e)$, $m(v)=a$
  ciklus vége
  $a=$ olyan $a\notin K$, amire $t(a)=\min(t(v): v\notin K\}$
  $K=K\cup\{a\}$
ciklus vége

Futásidő
belső ciklusok:
$(n-1)+(n-2)+(n-3)\dots+1$
$=\frac{n(n-1)}{2}\leq c\cdot n^2$
$\leq c_2\cdot n^2$

13

Def G irányított gráf aciklikus, ha nincs benne irányított kör

Def G irányított gráf csúcsainak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje topologikus sorrend, ha $\forall e = \{\overrightarrow{v_i, v_j}\}: i < j$

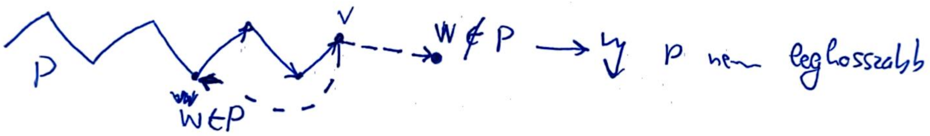
Tétel G-nek van topologikus sorrendje $\iff$ G aciklikus

Biz: $\Rightarrow$ triviális

$\Leftarrow$

Lemma G aciklikus $\Rightarrow$ G-ben van nyelő

Biz P: egyik leghosszabb út (vége: v)



G van kör P-ben ↯

v_1 ... v_{n-2} v_{n-1} v_n nyelő G-ben

nyelő $(G - v_n)$-ben

(csúcsok törlésekor G nem veszti el aciklikusságát)

$(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ topologikus sorrend

Leghosszabb / Legrövidebb út aciklikus gráfba

Input: G irányított gráf, $S = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ topologikus sorrend, w súlyfv.

$t(v_1) = 0$

ciklus $i = 2$-től n-ig

$$t(v_i) = \substack{\max \\ \min} \left\{ t(v_j) + w(e) : e = (v_j, v_i) \right\}$$

ciklus vége

Lépésszám: $\leq c \cdot (n+m)$

minden éllel egyszer foglalkozik

minden csúccsal egyszer foglalkozik

(1.b)

DFS alg $d(v)$: csúcs mélységi száma, hányadikra érte el a DFS.

$f(v)$: csúcs befejezési száma, hányadikra nyilvánította befejezettnek a DFS

$m(v)$: ~~adott~~ csúcsot megelőző csúcs a bejárásban

a: aktív csúcs

Alg: input: G ir. gráf, s kezdőcsúcs $\in V(G)$

$f(v) = *$ $\forall$ csúcs,

$d(v) = *$ $\forall$ csúcs, $d(s) = 1$, $a = s$, $F = 0$, $D = 1$

végtelen ciklus

ha $\exists$ $e = (a, v)$, amire $d(v) = *$, akkor

D++;

$d(v) = D$;

$m(v) = a$;

$a = v$;

különben

F++

$f(a) = F$

ha $m(a) \neq *$, akkor $a = m(a)$

különben: a = még bejáratlan csúcs; D++; $d(a) = D$;

ha nincs ilyen a, STOP;

ciklus vége

Lépésszám:

G szomszédsági listával van megadva

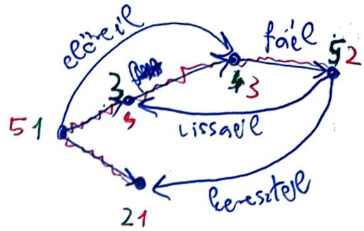
$c \cdot (m + n)$

DFS-erdő $\{m(v), v\}$ élekből áll, ~~...~~ ~~...~~ kiindulás: ~~...~~ gráf $\forall$ csúcsát tartalmazza

Élek osztályozása

$e: a \longrightarrow v$

mélységi
befejezési
(bejárás fában)



1, faél: $e \in F$ (F) $e: a \longrightarrow v$ $\iff d(v) = *$

2, előreél: v elérhető a-ból (nem faél) $\iff d(v) > d(a)$

3, visszaél: a elérhető v-ből (nem faél) $\iff d(v) < d(a)$ és $f(v) = *$

4, keresztél a és v nem elérhető egymásból $\iff d(v) < d(a)$ és $f(v) \neq *$

Tétel

G ir. gráf

(1) G aciklikus $\iff$ nem keletkezik visszaél

(2) Ha nincs visszaél $\implies$ $f(v)$-k szerint: csökkenő sorrend topologikus sorrend

Biz (1) $\implies$ triviális

(1) $\impliedby$ (2)-ből következik

(2) $e: a \longrightarrow v$ ~~f(v) < f(a) (garantált)~~

előreél

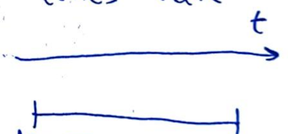
✓

keresztél

✓

Def

csúcs élete



$d(v) \neq *$ $f(v) \neq *$

↑ kap mélységi számot ↑ kap befejezési számot