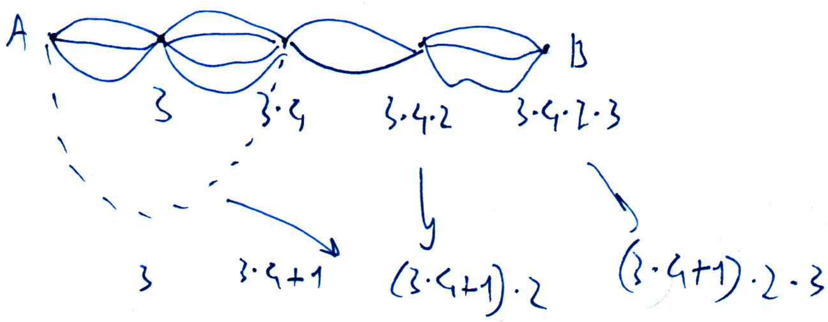
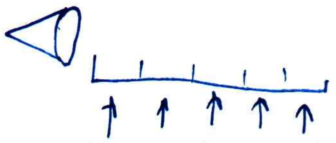
Bsz2

2022.02.14
1



Fagyi: A, B, C, D, E



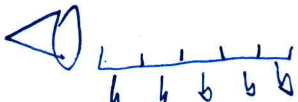
(ne tartsunk fagyit vízszintesen)

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

Permutáció: n különböző elem sorbarendezései

száma: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

A, B, C, …, X, Y, Z 26db



5 különböző gombóc

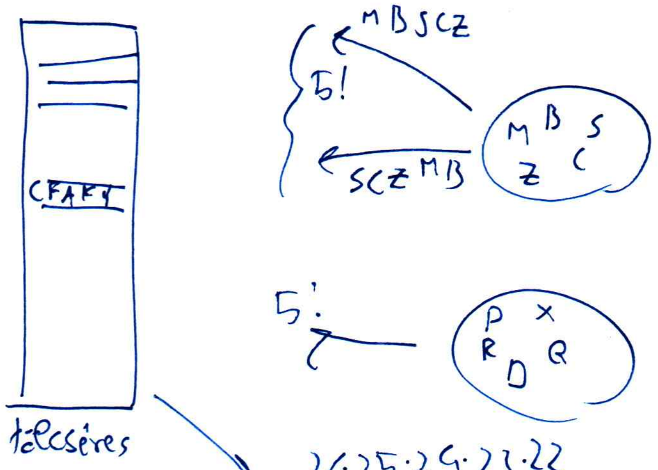
$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 =$

Variáció: (ism. nélk.) n különböző dologból k tagú sorozat különböző tagból

száma: $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

---

26 ból 5 különböző gombóc tányérra (sorrend nem számít)



$$\frac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{5!}$$

<u>Kombináció (ism. nélk.)</u>: n különböző dologból k különböző választása

sorrend mindegy

száma: $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$\boxed{0! = 1,\ \binom{n}{0} = 1}$

Pascal-△

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$

$\binom{5}{2}$

<u>Áll</u> $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

<u>Biz</u> n fős testület, k fős delegáció

$\binom{n}{k}$ ← elutazók $\quad$ $\binom{n}{n-k}$ ← itthon maradók

<u>Áll.</u>: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

<u>Biz</u> n fős testület, k fős delegáció (Kovács úr problémás...) $\binom{n}{k}$

Kovács úr nem mehet: $\binom{n-1}{k}$ | Kovács úr utazik: $\binom{n-1}{k-1}$ $\oplus \to$

Bsz2

2022. 02. 14
2

Permutáció (ismétléses):

A, A, A, A, B, B, B, C, C,

$A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2$ | $AAAAB_1B_2B_3C_1C_2$ | $AAAABBBC_1C_2$ | 4A3B2C

1234
1243
⋮
4321

4!

$B_1AAC_2B_3AC_1B_2A$

$9!$ | $\frac{9!}{4!}$ | $\frac{9!}{4!\cdot 3!}$ | $\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}$

---

k_1 db 1. típusú
k_2 db 2. típusú
⋮
k_e db e. típusú

$$\frac{(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_e)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot\ldots\cdot k_e!}$$

Variáció (ismétléses):

n-ből k hosszú sorozat: n^k

$26\cdot 26\cdot 26\cdot 26\cdot 26 = 26^5$

Kombináció (ismétléses):

A | B xx | C | D x | … | S x | … | Y | Z x

26-ból 5-ös tángyó

○ → *| sorozat

*5db, |25db } $\frac{\text{*-ok helyét választjuk ki: } \binom{30}{5}}{\text{n-ből k-t választunk ki, sorrend mindegy, ism. lehet}}$

*: n db, |: … } n+k-1 db jel $(n+k-1 \ldots)$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$(a+b)^4$

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1a^0b^4$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + \binom{n}{n}a^0\cdot b^n$$

<u>Binomiális tétel</u> $\rightarrow$

<u>Biz</u>: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n\text{ db}} = \ldots\ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k + \ldots$

n zárójelből azt a k-t választom ki, amiből a b-t veszem.

---

n elemű halmaz részhalmazai: 2^n

A B C

✓ ✓ ✓

× × ×

$2\cdot 2\cdot 2$

x y z

✓ ✓ ✓

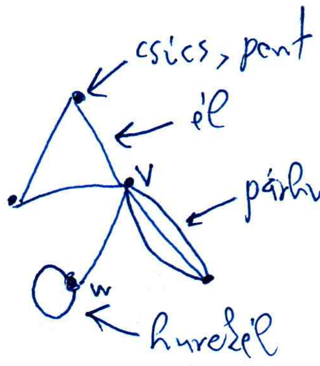
× × ×

$2\cdot 2\cdot 2 = 2^{26}$

---

0 elemű	1 elemű	2 elemű		k elemű		n elemű	
$\binom{n}{0}$ +	$\binom{n}{1}$ +	$\binom{n}{2}$	+ ... +	$\binom{n}{k}$	+ ... +	$\binom{n}{n}$	$= 2^n$

Gráf



egyszerű gráf:

∅ hurokél

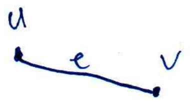
∅ párhuzamos él

v foka: v-re illeszkedő élek száma

(hurokél 2-nek számít)

↳ jele: $d(v)=6$

$d(w)=3$



e végpontjai: u és v

u és v szomszédosak (e él mentén)

e él illeszkedik v-re

G gráf: $V(G)$ = G csúcsainak száma

$E(G)$ = G éleinek száma

Tétel: G gráf

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

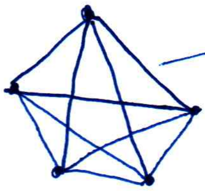
Biz: minden él 2-vel járul hozzá az összeghez

Def: V: tetszőleges, véges, nem üres halmaz

E: V 2 elemű részhalmazainak egy halmaza

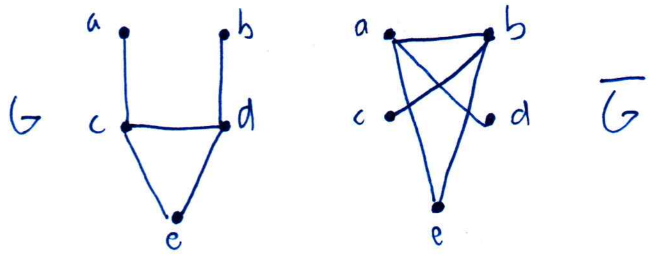
Ekkor a $G=(V,E)$ egyszerű gráf

n csúcs, egyszerű gráf



teljes gráf

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$



Def: $G=(V,E)$ egyszerű gráf

G komplementere: $\overline{G}$ egyszerű gráf

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

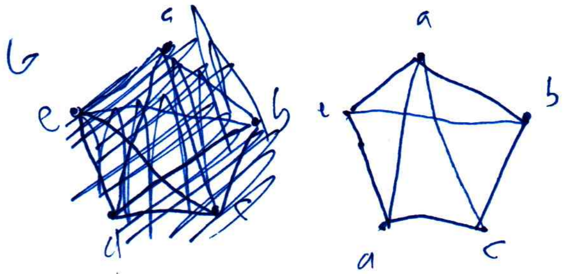
$$E(\overline{G}) = \{\{u,v\} : u,v \in V(G), \{u,v\} \notin E(G)\}$$

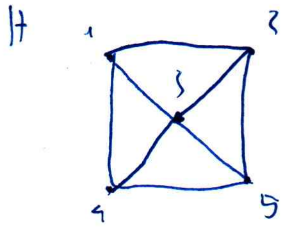
Def G, H gráfok izomorfak, ha $\boxed{\text{Jele } G \cong H}$

$\exists\, f: V(G) \to V(H)$ kölcsönösen egyértelmű

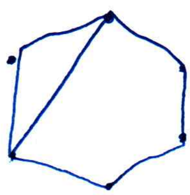
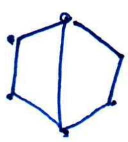
$\forall\, u,v \in V(G)$:

u, v közötti G-beli élek száma = $f(u), f(v)$ közötti H-beli élek száma





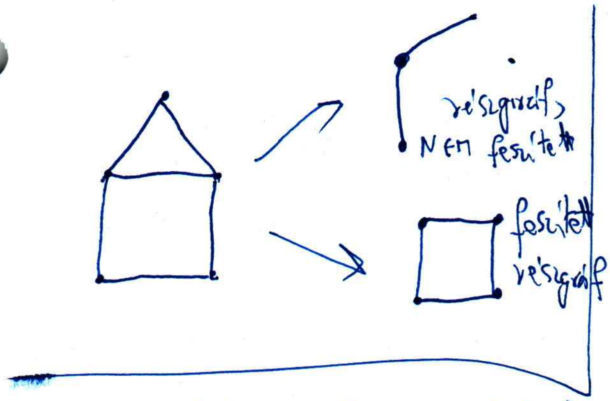
G	a	b	c	d	e
H	3	2	4	5	1

 $\not\cong$ 

Bsz ea

2022.02.21

2



Def: G tetsz. gráf

$e \in E(G)$ **törlése**:

$V(G') = V(G)$

$E(G') = E(G) \setminus \{e\}$

$v \in V(G)$ törlése: $V(G') = V(G) \setminus \{v\}$, $E(G') = E(G) \setminus \{v\text{-re illeszkedő élek}\}$

Def: H feszített részgráfja G-nek, ha megkapható G-ből csak csúcsok törlésével.

$X = \{\text{megmaradó csúcsok}\}$

H: X által feszített részgráf

Def: H részgráfja G-nek, ha megkapható G-ből csúcsok és élek törlésével

Def: G gráf

élsorozat: $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$

$v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$, $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$

$\forall i = 1,2,\dots,k \quad e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

séta: olyan élsorozat, amelyben az élek nem ismétlődnek

út: olyan élsorozat, amelyben a csúcsok sem ismétlődhetnek

Áll $u, v \in V(G)$ $u \neq v$

$\exists$ u ~~~ v élsorozat $\Longleftrightarrow$ $\exists$ u ~~~ v út

Biz $\Leftarrow$ ✓ $\Rightarrow$

P: élsorozat u ~~~ v

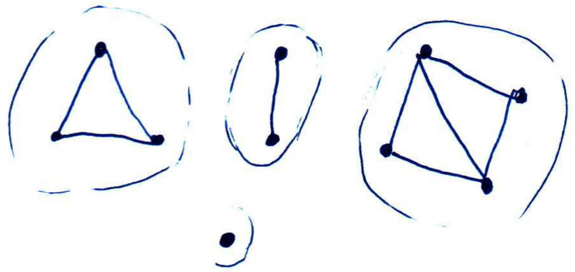
ha P út ✓, ha nem: pl.: z ismétlődik

$P = (u, \dots, \cancel{z, \dots,} z, \dots, v)$

$P' = (\dots)$

$[\dots] \rightarrow P''$ út

Def: G gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között létezik út



Def: v-ből elérhető a w csúcs, ha $\exists$ $v \sim\sim w$ út G-ben

$v \in V(G)$ $\quad X = \{w : w \text{ elérhető } v\text{-ből}\}$

X által feszített részgráf **v komponense**

H feszített részgráf **(összefüggő) komponense** G-ben, ha H a G valamelyik csúcsának komponense

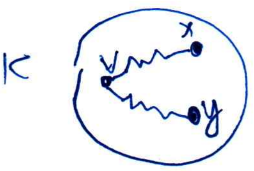
Tétel: (1) G komponensei összefüggőek

(2) G komponensei diszjunkt részekre vágják a csúcshalmazt

Biz **Lemma**
$$\left.\begin{array}{l} w \text{ elérhető } v\text{-ből} \\ z \text{ elérhető } w\text{-ből} \end{array}\right\} \Rightarrow z \text{ elérhető } v\text{-ből}$$

$v \sim\sim w \sim\sim z \Rightarrow v \sim\sim z$ élsorozat $\Rightarrow \exists\ v \sim\sim z$ út

(1) $x, y \in V(K)$

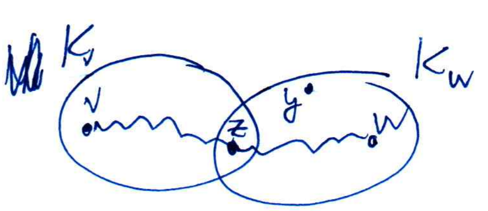


$\Rightarrow$ v-ből elérhetők $\overset{L}{\Rightarrow}$ x, y egymásból elérhetők

$\Downarrow$

K öf.

(2) $v \in v$ komponense

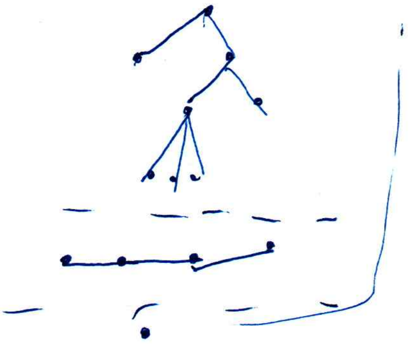


$z \in V(K_v) \cap V(K_w)$

$y \in K_w$
$$\left.\begin{array}{l} v \sim z \\ z \sim w \\ w \sim y \end{array}\right\} \overset{L}{\Rightarrow} \exists\ v \sim y \text{ út}$$

K_w csúcsai $\subseteq K_v$ csúcsai

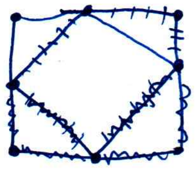
$\Rightarrow K_v = K_w$



Def: $P=(v_0,e_1,v_1,\dots,e_\ell,v_\ell)$ élsorozat

körséta: séta, amire $v_0=v_\ell$

kör: körséta, csupa különböző csúcs ($\ell\geq 1$)



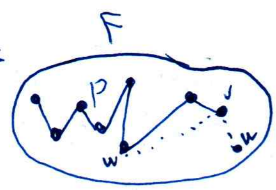
~~ : körséta

//// : kör

Def: F fa, ha összefüggő és nincs benne kör (körmentes)

Tétel: Ha F fa, ≥ 2 csúcsú $\Rightarrow$ van benne legalább két egyfokú csúcs

Biz



P: leghosszabb út F-ben

v végpontja P-nek

Ha $\forall\, e=\{v,w\}$; w nincs P-n, ↯, P leghosszabb

——— " ——— van kör

Tétel G gráf, n csúcs, m él

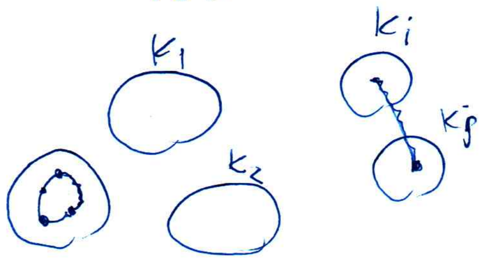
① G öf. $\Rightarrow m\geq n-1$

② G körmentes $\Rightarrow m\leq n-1$

③ G fa $\Rightarrow m=n-1$

Biz $E(G)=\{e_1,e_2,\dots,e_\ell,e_{\ell+1},\dots,e_m\}$

$V(G_0)=V(G)$



$x\in V(K_i)$; $y\in V(K_j)$

1. eset $i=j$, komponensek ugyanazok

2. eset $i\neq j$ K_i és K_j egyesül, többi változatlan

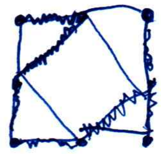
① $n \rightarrow, \dots, \rightarrow 1$

$n-1$ csökkenéshez $n-1$ 2. eset kell

② körmentes $\Rightarrow$ 1. eset nem fordul elő

$\Rightarrow$ $n-1$ él után már 1 komponens van $\Rightarrow m \le n-1$

③ $\Leftarrow$ (1), (2)



<u>Def</u> G gráfnak F részgráfja feszítőfa, ha,

① fa

② $V(F) = V(G)$

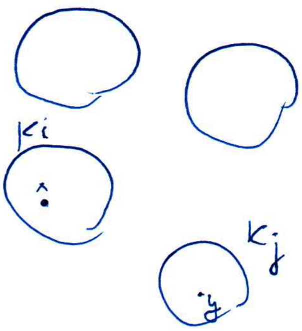
<u>Tétel</u> G-ben van feszítőfa $\Longleftrightarrow$ G öf.

<u>Biz</u> ($\Rightarrow$) ✓

($\Leftarrow$)

$\underbrace{e_1, \dots, e_k}$ körmentes ha még nem öf.

cél: e_{k+1} különböző komponensek között ($\Rightarrow$ körmentesség marad)



nem öf. $\Rightarrow \geq 2$ komp.

$x \in V(K_i)$, $y \in V(K_j)$

van G-ben egy $\boxed{P}$ $x \rightsquigarrow y$ út (öf)

P: $x \rightsquigarrow u \xrightarrow{e_{k+1}} v$

első, K_i-n kívüli

e_{k+1} különböző komponensek között

Bsz ea

2022.02.28

2

Irányított gráf

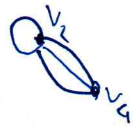
irányított út

Szomszédsági mátrix

$V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\to A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{array}{c|cc} & v_2 & v_4 \\ \hline v_2 & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$



a_{ij}: v_i-ből v_j-be menő élek száma

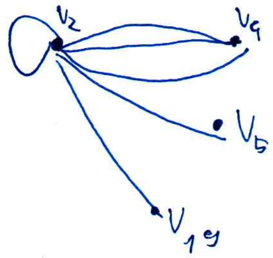
Szomszédsági lista

v_1

$v_2: v_4 \to v_4 \to v_4 \to v_5 \to v_{19} \to v_2$

⋮

v_n



$\boxed{\le c \cdot (n+m)^k}$

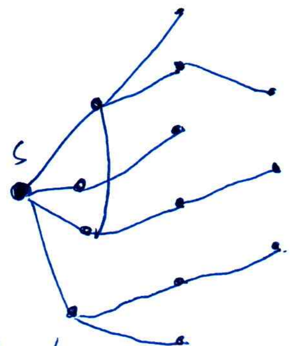
csúcsszám, élszám

Input: $G = (V, E)$ gráf, $s \in V(G)$

$v \in V(G)$:

$t(v)$: s-ből v-be a legrövidebb út hossza (éleinek száma)

Szélességi keresés (BFS)



t=0 t=1 t=2 t=3

$m(v)$: honnan értem el v-t

$b(i)$ $\underbrace{\quad v_i \quad}_{\text{i-edik bejárt csúcs}}$

$t(v) \neq * \iff v$ elérhető s-ből

$\{u, m(u)\}$ feszítőfa élhalmaza, BFS-fa

Irányított BFS:

5. sor: l_2 a $b(\ell)$-ból vezet (irányított) él olyan i.-be...

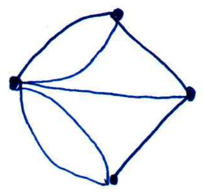
Lépésszám:

$\forall$ csúcs listáján csak egyszer lesz légig

listák összhossza: $2m$

$\Downarrow$

teljes lépésszám: $c \cdot (n+m)^1 \rightarrow$ lineáris



Def G gráf

Euler-séta: olyan séta, ami G $\forall$ élét tartalmazza.

-körséta: -||- kör —— || ——

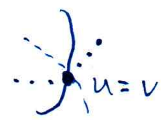
Euler-séta végpontjai u, v

$w \neq u, v$

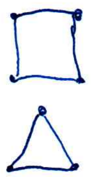
$d(w) = 2\times$ áthaladások száma

↳ páros

körséta: $u = v$



$2\times$ áthaladások száma ✓



Tétel: G legyen összefüggő gráf, ekkor:

(1) $\exists$ Euler-séta $\Leftrightarrow$ 2 kivétellel $\forall$ csúcs foka páros

(2) ~~[illegible]~~ $\exists$ Euler-körséta $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ csúcs foka páros

Biz (1), (2) $\Rightarrow$ ✓

(2) $\Leftarrow$: Algoritmus: $v \in V(G)$ tetsz.

karban tart: P, $v \rightsquigarrow v$ körséta, u: aktív csúcs

$P \leftarrow (v)$, $u \leftarrow v$

ciklus

- u-ból ~~P~~ P-be nem tartozó élek gráfjában Q séta vaktában, elakadásig (u-ban)
- Q beszúrása ~~[illegible]~~ P-be u egy előfordulásánál
- Ha P Euler-körséta: STOP
- u: olyan csúcs amire illeszkedik P-beli és nem P-beli él is (∗∗)

ciklus vége

Lemma H gráf, $\forall$ foka páros. $u \in V(G)$-ből vaktában séta (P), elakadásig

$\Downarrow$

P végpontja is u.

Biz $x \neq u$ csúcs, P éppen x-ben tart, eddig használt x-re illeszkedő élek száma: $2\times$(eddigi áthaladások száma) + 1 $\Rightarrow d(x)$ ps $\Rightarrow$ P nem akad el

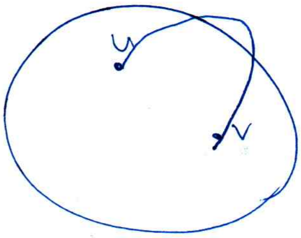
Áll.: igen $(**)$ a feltétel

Biz.: indirekt

V_1: olyan csúcsok, amire csak p-beli él illeszkedik

V_2: olyan csúcsok, amire csak nem p-beli illeszkedik

(1) $(\Leftarrow)$ ≤ 2 kivétel
- 0 ✓
- 1 × (pte felöröség :( )
- 2: u, v



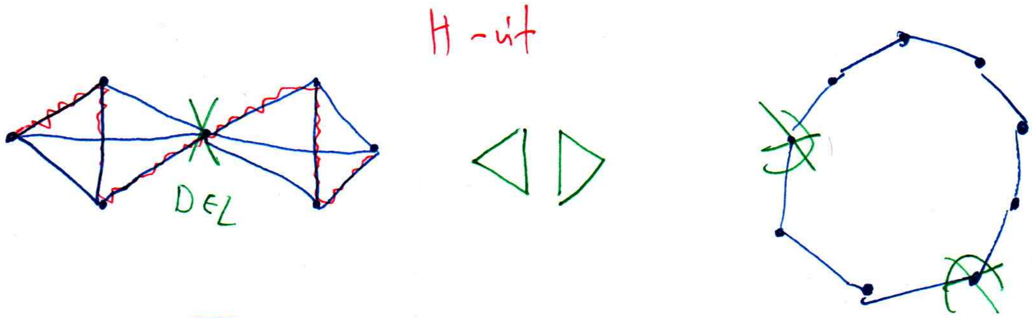
$G' = G + \{u, v\}$

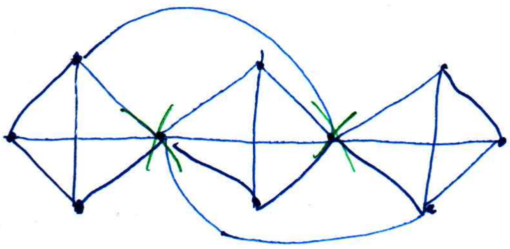
Def G gráfban:

Hamilton-út: G minden csúcsát tartalmazó út

Hamilton-kör: ——"—— kör

H-út





Tétel: Ha G gráf, $k \geq 1$ egész

(1) G-ben van H-kör $\Rightarrow$ bárhogyan k csúcsot törölve a kapott ~~gráfnak~~ gráfnak $\leq k$ komponense van

(2) H-út ——"—— ——"——

—"— $k+1$ —"—

Biz (1) b csúcs [DEL] $\Rightarrow$ H-körből marad $\leq k$ ív $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\leq k$ komponens

(2) $\leq k+1$ ív $\leq k+1$ komp

Tétel (Dirac)

$\underbrace{G \text{ egyszerű gráf}, n \geq 3, \forall \text{ csúcs foka } \geq \frac{n}{2}}$ $\Rightarrow$ G-ben van H-kör

$\Uparrow$

Tétel (Ore)

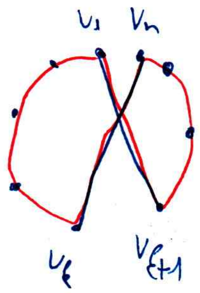
G egyszerű gráf, $n \geq 3$
$\forall$ u, v csúcsokra, amik nem szomszédosak,
$d(u)+d(v) \geq n$
$\Rightarrow \exists$ H-kör G-ben

Biz (Ore): $\Pi = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ tetsz.

$e(\Pi) := \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ párok közül a G-ben szomszédosak száma.

cél: $e(\Pi) = n$ (H-kör)

alg: $\left.\begin{matrix}\Pi \\ e(\Pi) < n\end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix}\Pi' \\ e(\Pi') > e(\Pi)\end{matrix}$



pl: $\{v_1, v_n\} \notin E(G)$

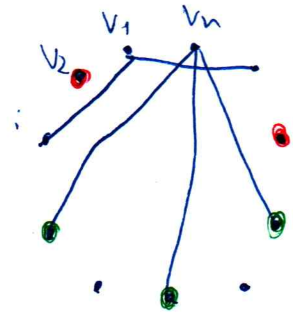
célunk k keresése, amire

$\left.\begin{matrix}\{v_1, v_{k+1}\} \in E(G) \\ \{v_k, v_n\} \in E(G)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Pi' = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_n, \ldots, v_{k+1})$

$e(\pi') = e(\pi) + (1 \text{ vagy } 2)$

mert $\{v_1, v_{\ell+1}\}, \{v_n, v_\ell\} \in E(G)$

$\{v_\ell, v_{\ell+1}\}$??, $\{v_1, v_n\} \notin E(G)$



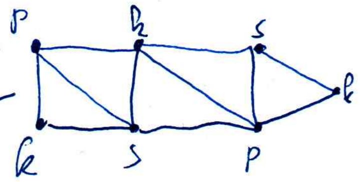
$Z = \{v_i : \{v_i, v_n\} \in E(G)\}$ $\quad |Z| = d(v_n)$

$P = \{v_j : \{v_1, v_{j+1}\} \in E(G)\}$ $\quad |P| = d(v_1)$

$\left.\begin{array}{l}|Z| = d(v_n)\\ |P| = d(v_1)\end{array}\right\}$ $|Z| + |P| = d(v_1) + d(v_n) \geq n$ felt

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l}\leq n-1 \text{ csúcson}\\ \geq n \text{ „szín-pötty"}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, v_\ell \in Z \cap P$



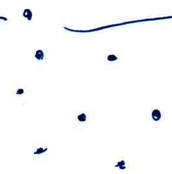
Def G gráf csúcsai k színnel színezhető, ha G csúcsai k színnel megszínezhetők úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs különböző színű.

G kromatikus száma k, ha G k színnel színezhető, de (k-1) színnel már nem. Jele $\chi(G)=k$

→ 3 szín elég, 2 nem elég (△) $\chi(G)=3$

K_n teljes gráf $\chi(K_n)=n$

$\chi=1$

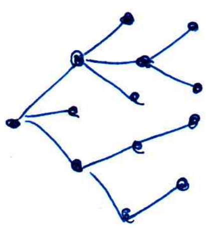


$\chi=2$ **Def** G gráf páros gráf, ha $V(G)$ felbontható az A és B halmazok egyesítésére úgy, hogy G minden éle A-belit köt össze B-belivel

(Azaz $\chi(G)\leq 2$) $G=(A,B,E)$

Tétel
G páros gráf ⟺ G nem tartalmaz ptl kört

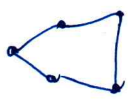
Biz ⟹ ✓ ⟸ BFS



v piros ⟺ $t(v)$ páros
kék ⟺ $t(v)$ páratlan

$e=\{u,v\}\in E(G) \Rightarrow$
$\Rightarrow |t(u)-t(v)|\leq 1$

cél $t(u)=t(v) \Rightarrow u,v$ nem szomszédos, ha $e=\{u,v\}\in E(G) \Rightarrow$ legközelebbi közös ősükön át



2k+1 hosszú kör

Ha G nem öf.: ∀ komponensre ugyanez

Mohó színezés: ① ② ③ színek

Input: G gráf, csúcsok $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje

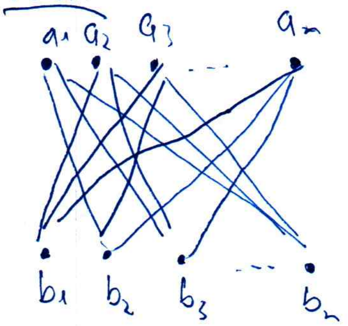
$c(v_1) \leftarrow 1$, $C \leftarrow 1$

ciklus: i fut 1-től n-ig

- $t \in \{1, 2, \ldots, C, C+1\}$ közül legkisebb, hogy v_i-nek nincs t színű szomszédja
- $c(v_i) \leftarrow t$
- Ha $t = C+1$, akkor $C \leftarrow C+1$

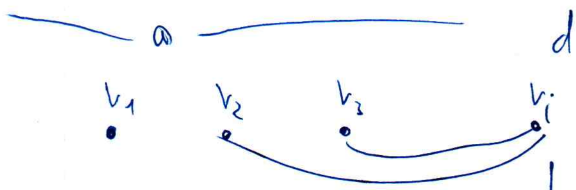
ciklus vége

Példa



$a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3 \ldots a_n\, b_n$

① ② ③ ... ⓚ



$d(v_i) = k \leq \Delta$

$\geq k$ „rossz" színe van

Áll $\Delta(G)$: G-beli max fokszám $\Rightarrow$ mohó eljárás $\leq \Delta(G)+1$ színt haszn

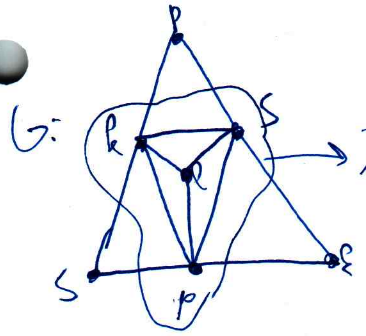
Biz ha $C = \Delta + 1$, az eljárás során $\Rightarrow$ nem nő..

Köv: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Biz mohó

Bsz ea

2022.03.21
2



$\chi \le 4$

$\chi \le 4$

$\chi(G) = 4$

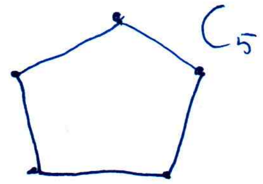
$\omega(G) = 4$

Def G gráf klikkszáma k, ha G csúcsai között k db olyan, amik közül bármely kettő szomszédos, de $k+1$ már nem

Jele $\omega(G) = k$

Áll $\omega(G) \le \chi(G)$

biz $\omega(G) = k \Rightarrow k$ csúcsú klikk csúcsaihoz k szín kell



$\omega(C_5) = 2$

$\chi(C_5) = 3$

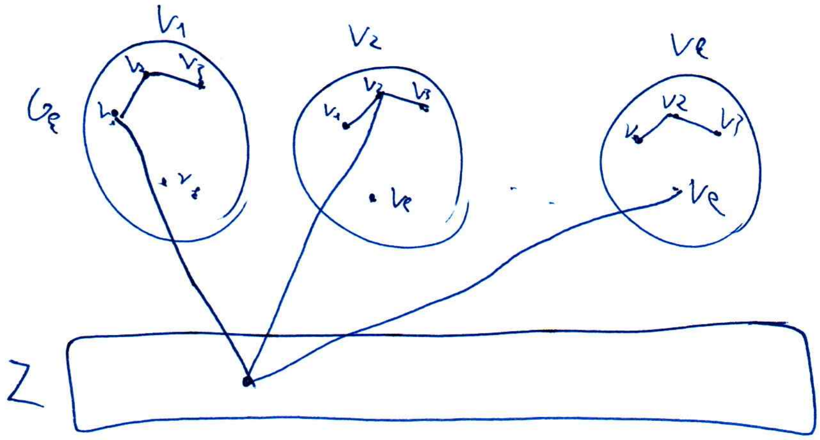
Tétel: $\exists\, G_k$ gráf, amire $\omega(G_k) = 2$ és $\chi(G_k) = k$

Biz (Zykov)

$G_k \rightsquigarrow G_{k+1}$

$\omega = 2 \quad \omega = 2$

$\chi = k \quad \chi = k+1$



G_k kópiája $V_1, V_2, \ldots, V_k$

$(v_1, v_2, \ldots, v_k) \longmapsto z$, szomszédai $v_1, \ldots, v_k$

$e_{v_1} \; e_{v_2} \quad e_{v_k}$

Áll $\omega(G_{k+1}) = 2$

$\triangle \to V_i$-n belül nincs $z \in Z$ szomszédja között nincs szomszédság áll $G_{\ell+1}$ $(\ell+1)$-gyel színezhető

$v_1, \dots, v_\ell$ csúcsai ugyanazzal a ℓ színnel színezhetők z csúcsai új színt kapnak

áll $G_{\ell+1}$ nem színezhető ~~~~ ℓ színnel

Biz tfh mégis, $G_{\ell+1}$-nek adott egy ℓ színnel való színezés

① ② ⓛ

V_1-ben van ① színű (v_1) mert G_ℓ nem $(\ell-1)$-színezhető

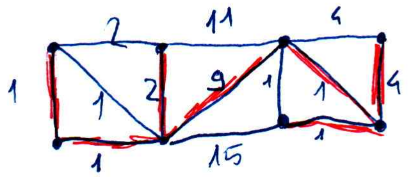
V_2-ben van ② színű csúcs v_2

$\vdots$

V_ℓ-ban ⓛ színű: v_ℓ

$(v_1, \dots, v_\ell) \longmapsto z \in Z$

z színe nem lehet ①, ②, .., ⓛ $\lightning$



Input G öf. gráf (n csúcs, m él)

$w: E(G) \to \mathbb{R}$ (súlyfv)

Output F feszítőfa G-ben, amire $w(F) := \sum_{e \in E(G)} w(e)$ minimális

---

Kruskal alg.

Élek rendezése $w(e)$ szerint: növekvő sorrendben

$F \leftarrow \emptyset$, $i \leftarrow 1$

ciklus amíg $|F| < n-1$

  Ha e_i végpontjai a $(V(G), F)$ gráfnak különböző komponenseiben vannak, akkor $F \leftarrow F \cup \{e_i\}$

  $i \leftarrow i+1$

ciklus vége

Tétel (Kruskal): A fenti algoritmus ~~mindig~~ minimális összsúlyú feszítőfát ad

Biz feszítőfát ad ✓

	e_1	e_2	e_3	...	e_m
$F_{mohó}$	1	1	0	...	

feszfa $\Leftrightarrow$ m hosszú bináris sorozat

Indirekt Tfh. $F_{mohó}$ nem min. összsúlyú.

F_{opt}: minimális összsúlyú feszítőfa, ami ~~lelető leg~~ ~~bináris~~ bináris sorozata lelető legjobban azonos $F_{mohó}$-val

e_j első eltérés helye

1. eset

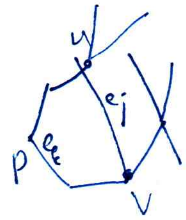
$F_{mohó}$ 0
F_{opt} 1

$\Rightarrow$ nem tartalmaz kört
$\Rightarrow$ mohó rosszul döntött

2. eset

$F_{mohó}$ 1

F_{opt} 0



p: F_{opt}-ban egy út u-ból v-be

$\Rightarrow$ p-nek van F_0-on kívüli e_ℓ éle (különben a mohó téredett)

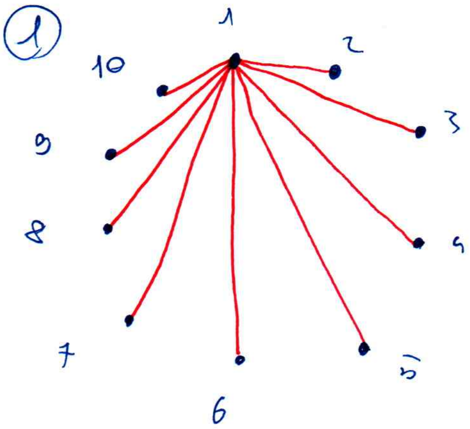
$$E(F^*) := E(F_{opt}) \cup \{e_j\} \setminus \{e_\ell\} \rightsquigarrow \text{áll}: F^* \text{ feszítőfa}$$

$$j < \ell \Rightarrow w(e_j) \leq w(e_\ell)$$

$$w(F^*) \leq w(F_{opt})$$

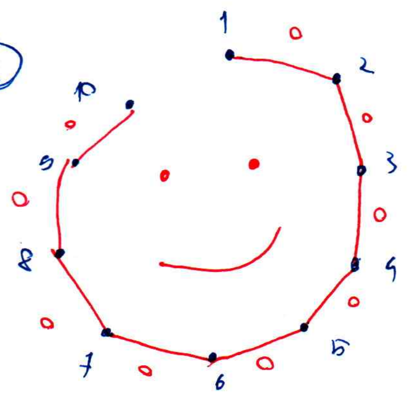
$\hookrightarrow (=)$

1



$2+3+4+\ldots+10=54$

2

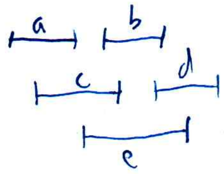


Bsz ea/gyak?

2022.03.26
2

(3) Minimális összsúlyú feszítőfa: tartalmaz 100 súlyú élet → 100 súlyú éle(ike)t ~~elhagy~~ elhagyva 2 vagy több komponensre bomlik, amiket csak 100 súlyú élek kötnek össze → bármely feszítőfa összefüggő gráfot alkot → kell benne lennie 100 súlyú élnek

(4) Amikor ~~ag~~ ~~ha~~ ~~ak~~ a kruskal alg. w(e) súlyú éleknél tart, akkor ~~vag~~ ~~(i-fogja vá)~~ ~~feszítő~~ V-be fog kerülni kiválasztott él, ami vagy e, vagy olyan f, amire $w(f) = w(e)$ → e benne lehet a feszítőfában.



Def $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ (korlátos, zárt)

intervallumok

$V(G) = \{I_1, \dots, I_n\}$

I_i szomszédos $I_j \iff I_i \cap I_j \neq \emptyset$

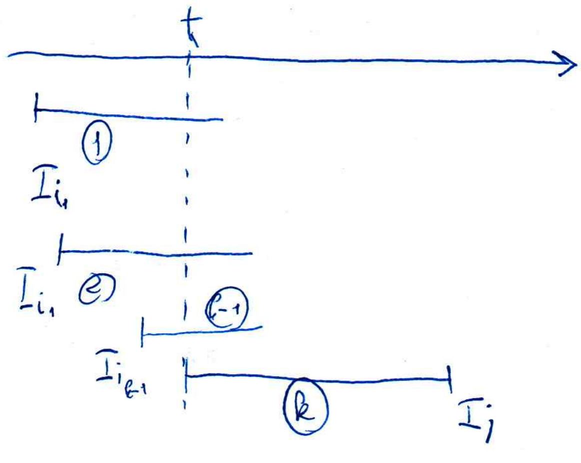
Az ilyenekkel izomorf gráfok neve intervallumgráf

Tétel G intervallumgráf, $I_1, I_2, \dots, I_n$ rendszert reprezentálja $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ intervallumok bal végpontja szerinti növekvő sorrendben a mohó színezési algoritmus $\chi(G)$ színnel színezi G-t

Biz mohó mohó k színnel

Cél: k csúcsú klikk $\quad k \le \omega(G) \le \chi(G) \le k$



1 2 ... k-1 k $\leftarrow$ színek

I_j: az először k-ra színezett csúcs

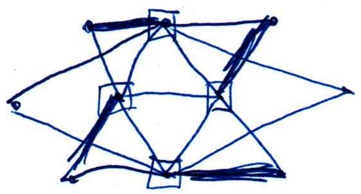
I_j nem lett 1 $\Rightarrow$ van I_{i_1}, ami korábban lett 1

I_j nem lett 2 $\Rightarrow$ ___"___

⋮

I_j ... $\Rightarrow$ $I_{i_{k-1}}$

Kör G intervallumgráf $\Rightarrow \omega(G) = \chi(G)$



Def G gráf, $M \subseteq E(G)$ párosítás / független élhalmaz, ha G minden csúcsára legfeljebb 1 M-beli él illeszkedik

nincs benne hurokél

$\nu(G)$: a legnagyobb párosítás(ok) mérete

Def: $X \subseteq V(G)$ lefogó ponthalmaz, ha G $\forall$ élének legalább egyik végpontja X-beli.

Áll $\left.\begin{array}{l} M \text{ párosítás} \\ X \text{ lefogó ponthalmaz} \end{array}\right\} \Rightarrow |M| \leq |X|$

Biz M minden éle elfoglal egy-egy másikat X csúcsai közül

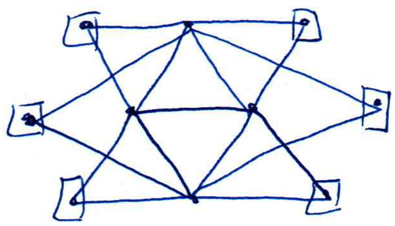
$\tau(G)$: legkisebb lefogó ponthalmaz(ok) mérete

Áll: $\cancel{\forall}$ $\nu(G) \leq \tau(G)$

Pél $G \cong K_{100}$ 100 csúcsú teljes gráf

$\nu(G) = 50$

$\tau(G) = 99$



Def $X \subseteq V(G)$ független ponthalmaz, ha semelyik két X-beli csúcs nem szomszédos.

$\alpha(G)$ = legnagyobb független ponthalmaz(ok) mérete

Áll $X \subseteq V(G)$ X lefogó ponthalmaza $\Longleftrightarrow$ $V(G) \setminus X$ független ponthalmaz

$\forall$ él egyik vége X-beli

Köv $\alpha(G) + \tau(G) = n$

	ftlen max	lefogó min
élhalmaz	$\nu(G)$ +	$\rho(G) = n$
csúcshalmaz	$\alpha(G)$ +	$\tau(G) = n$

(csúcsok száma)

Def $Z \subseteq E(G)$ (nincs izolált pont) lefogó élhalmaz, ha $\forall$ csúcs illeszkedik ≥ 1 Z-beli él.

$\rho(G)$: a legkisebb lefogó élhalmaz(ok) mérete

Tétel (Gallai) G n csúcsú, nincs izolált pont

$$\nu(G)+\rho(G)=n$$

① $\exists$ ℓ élű párosítás $\Rightarrow$ $\exists \leq n-\ell$ élű lefogó élhalmaz

② $\exists$ ℓ élű lefogó élhalmaz $\Rightarrow$ $\exists \geq n-\ell$ élű párosítás

Biz ①

M párosítás $\nu(G)$ élű $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \leq n-\nu(G)$ élű lefogó élhalmaz $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(G) \leq n-\nu(G)$

$$\rho(G)+\nu(G)\leq n$$

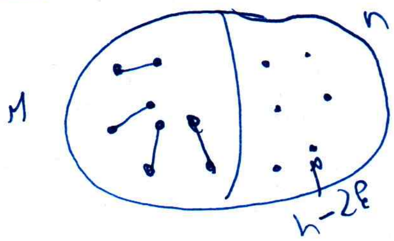
②

Z: legkisebb lefogó élhalmaz, $\rho(G)$ élű

$\Rightarrow$ van $\geq n-\rho(G)$ élű párosítás $\Rightarrow \nu(G)\geq n-\rho(G)$

$$\rho(G)+\nu(G)\geq n \Rightarrow \rho(G)+\nu(G)=n$$

Biz ①



M végpontjai 2ℓ csúcs

$M \cup \{$maradék csúcsok egy-egy éle$\}$

$\|$

$Z \to$ lefogó

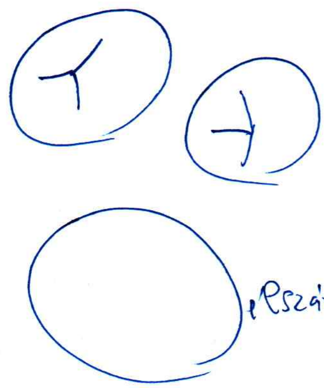
$$|Z| \leq \underset{M}{\ell} + n - 2\ell = n-\ell$$

Biz ② Z: ϱ élű lefogó élhalmaz

H: → $V(G)=V(H)$

$E(H)=Z$

C: legalább 2 csúcsú komponensek száma H-ban



összes élszám ≥ összes csúcsszám − C

M: $\forall$ (legalább 2 csúcsú) komponensből egy-egy (ne hurok) él

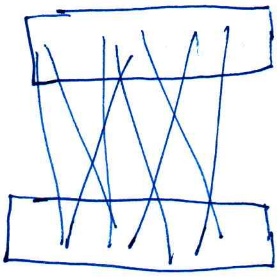
$|M| \geq n-\varrho$, M: párosítás

	ftlen		lef
él	ν	+	$\varrho = n$
csúcs	α	+	$\tau = n$

$\nu \leq \tau \Rightarrow \alpha \leq \varrho$

Áll $\alpha(G) \leq \varrho(G)$

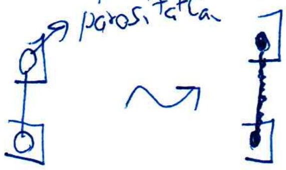
Biz $\alpha(G)$ elemű ftlen csúcshalmaz $\forall$ csúcsa elfoglal egy-egy kisajátít egy $\varrho(G)$ elemű lefogó élhalmazból

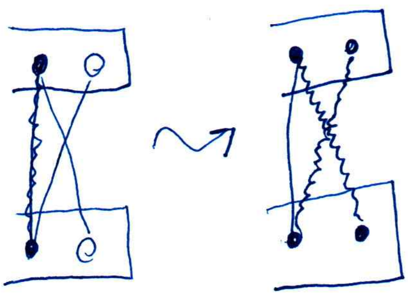


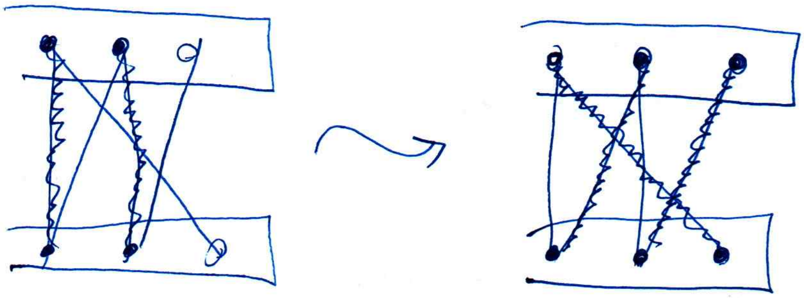
Input G ps. gráf

Output M párosítás, amire |M| maximális

König Dénes







Def: (F, L, E) ps. gráf, M psításra nézve javítóút: P út, ami:

- psítatlan F-beliből indul
- ∀ 2. éle M-beli
- psítatlan L-beliben ér véget

$\Rightarrow$ alternáló út

Jav. utas algoritmus

M tetsz. psítás (pl: $M = \emptyset$)

ciklus eleje

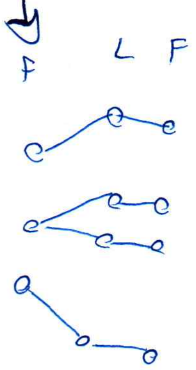
$\boxed{\text{P jav. út keresése M-re nézve}}$ → módosított BFS alg.

Ha ilyen nincs → STOP

Egyébként:

$M \leftarrow (M \setminus \{P$ párosadik ~~párosított~~ élei$\}) \cup \{P$ páratlanadik$\}$

ciklus vége



Tétel $G = (F, L, E)$ (Hall tétel)

$\exists$ F-et fedő psítás $\Longleftrightarrow$ $\forall X \subseteq F$ $|N(X)| \geq |X|$

$X \subseteq F$

$N(X) = \{v \in L :$ v szomszédos X-beli csúccsal$\}$

Biz $\Longrightarrow$ ✓ (nyilván)

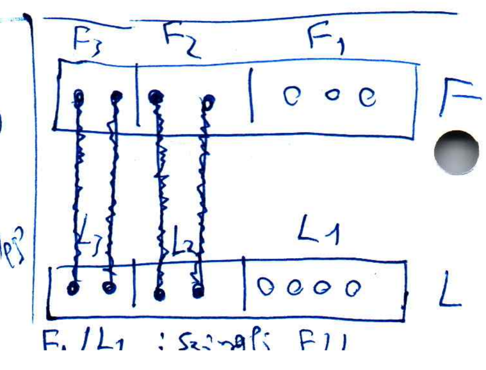
$\Longleftarrow$: alg. → M psítás Ha M lefedi F-et $\Longrightarrow$ ok ✓

Ha nem:

Állítás: G-ben nincs $(F_1 \cup F_2) - (L_1 \cup L_3)$ típusú él

$L_2 : F_2$ párjai F_3/L_3 : maradék

F_1 [illegible]: alternáló úton



Bsz2 e4

2022.04.04
2

...Biz $\Leftarrow$ $\overset{\text{elg}}{\rightsquigarrow}$ M psítás

Ha M lefedi F-et $\Rightarrow$ OK

Ha nem: $X := F_1 \cup F_2$

$$N(X) = L_2$$

$$|F_1 \cup F_2| > |L_2|, \text{ mert } F \neq \emptyset$$

$$|N(X)| < |X| \text{ ↯}$$

...Állítás: G-ben nincs $(F_1 \cup F_2)-(L_1 \cup L_3)$ típusú él

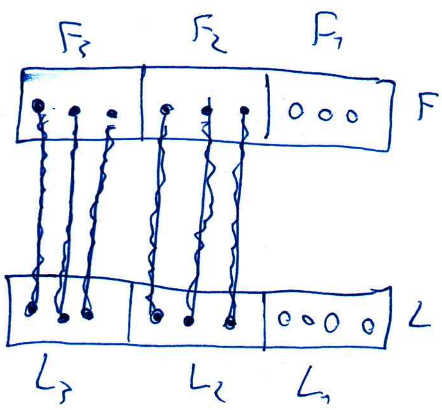
Biz

$F_1 - L_1$: 1 élű javító út ↯

$F_1 - L_3$: F_3-beli alternáló úton elérhető ↯

$F_2 - L_1$: volna javító út ↯

$F_2 - L_3$: volna alt. út F_3-beliből ↯



F_1/L_1 szingli lányok/fiúk

F_2: alternáló úton elérhető fiúk

L_2: F_2 párjai

F_3/L_3: maradék

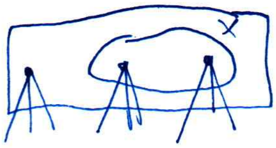
Tétel $G=(F,L,E)$ páros

$\exists$ teljes psítás $\Longleftrightarrow$ (1) $|F| = |L|$ (2) $\forall X \subseteq F$ $|N(X)| \geq |X|$

$\Rightarrow$ ✓

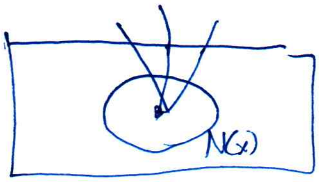
$\Leftarrow$: Hall $\Rightarrow$ van F-et lefedő psítás, ez teljes psítás

Tétel G páros gráfban, $\forall$ csúcs foka d $(d \geq 1)$ ↳ d reguláris $\Rightarrow$ G-ben van teljes párosítás

Biz F 

$|F| \cdot d = \{\text{élek száma}\} = |L| \cdot d$

$|F| = |L|$ (1) ✓

L 

(2) $X \subseteq F$

$|X| \cdot d = \left\{ \begin{array}{l} X \text{ és } N(X) \\ \text{közti élek száma} \end{array} \right\} \leq |N(X)| \cdot d \;/ : d$ ✓

$|X| \leq |N(X)|$

Tétel Ha már nincs M-re nézve javító út ($G=(F,L,E)$ páros gráf) $\Rightarrow$ M max. párosítás

Biz $|M| = k$ célunk: G-ben van k csúcsú Z lefogó ponthalmaz

Ekkor $k \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq k$ ✓

	$L_1 \cup L_3$	$\boxed{L_2}$
$F_1 \cup F_2$	X	✓
$\boxed{F_3}$	✓	✓

$Z := L_2 \cup F_3$ lefogó ponthalmaz

$|Z| = k$, mert $\forall$ párból 1 tagot tartalmaz

Tétel G ps gráf $\Rightarrow$ $\nu(G) = \tau(G)$ (Kőnig-tétele)

BSz eq ∅ Szeszler :(

2022.04.1
1

Él kromatikus száma

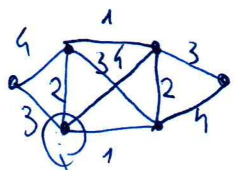
def adott egy G gráf. G gráf k színnel való élszínezése: ∀ bármely 2 szomszédos él különböző színű

G gráf élkromatikus száma: k, ha G gráf élei k színnel kiszínezhetőek, de k−1-el már nem.

jelölése $\chi_e(G)$
↑ edge (nem böngésző)

megj: hurokélek, párhuzamos éleket külön színnel színezzük

pl



→ 4 színnel ki van színezve

3 színnel már nem lehet

→ 4 különböző szín

$\chi_e(G) = 4$

All hurokélmentes gráfnál:

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G)$$

Biz triviális

I (?) ∀ egyszerű gráf $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$

köv. egyszerű gráf ∀ $\chi_e(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\}$

Ø Szeszler :-(

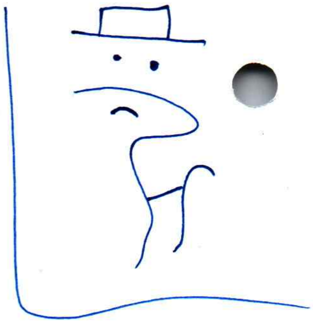
Pl :-(„ℓ-szoros $\triangle$”

$\Delta(G) = 2\ell$

$\chi_e(G) = 3\ell$ mivel...

$\chi_e(G) = 3\ell$

$\chi_e(G) = \frac{3}{2}\Delta(G)$



T (?) $\forall G$ gráf: $\chi_e(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$

Biz Ø

T (König) G ps gráf: $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Biz a, G reguláris gráf [...] [?]

[Bsz jegyzet by Szeszler]

VIZ!!!

Hálózati fogalmak

Def Hálózat: irányított G gráf

$s, t \in V(G)$ s: termelő (nem fordítva)
t: fogyasztó

c kapacitásfv $c: E(G) \to \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{R}^-\}$

(G, s, t, c) négyes írja le a hálózatot

ezen a legtöbb dihidrogén-monoxidot szeretnénk eljuttatni s-ből t-be

Bsz ea/

2022.04.25
1

Áll/ f folyam → f' is folyam

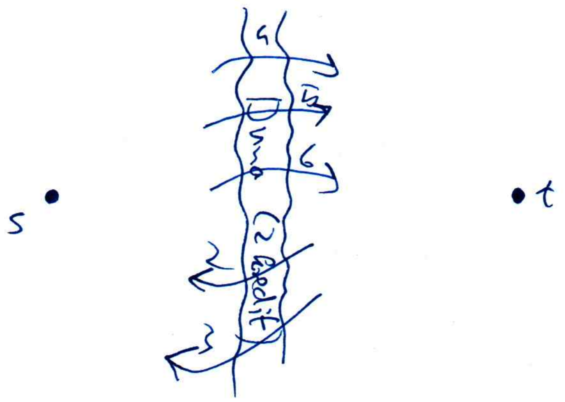
biz $0 \le f'(e) \le c(e)$ → δ def

v csúcs, ha v nincs P-n ⇒ OK

H_f : $\xrightarrow{z}v\xrightarrow{z}$ $\xrightarrow{z}v\xrightarrow{p}$ $\xrightarrow{p}v\xrightarrow{z}$ $\xrightarrow{p}v\xrightarrow{p}$

G : $\xrightarrow{+\delta}v\xrightarrow{+\delta}$ ✓ $\xrightarrow{+\delta}v\xleftarrow{-\delta}$ —||— —||—

be: ugyanaz
ki: ugyanaz



$(4+3+6)-(3+2)=10$

Def (G, s, t, c) hálózat

Vágás : $X \subseteq V(G)$, $s \in X$

s-t-vágás $t \notin X$

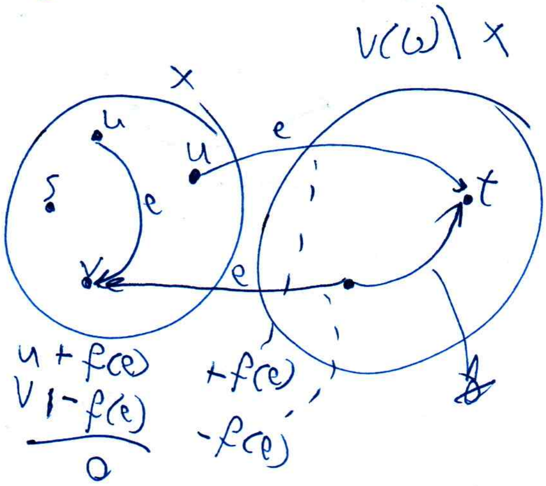
Áll f folyam, X vágás $\Rightarrow m_f = \sum_{X \xrightarrow{e}} f(e) - \sum_{\xrightarrow{e} X} f(e)$

Biz s: $m_f = \sum_{s \xrightarrow{e}} f(e) - \sum_{\xrightarrow{e} s} f(e)$

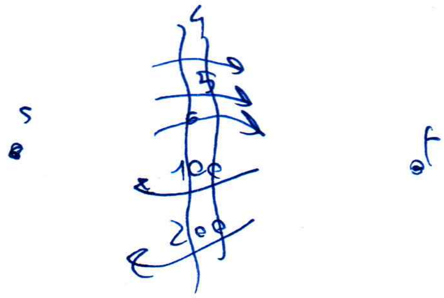
$\left.\begin{array}{l} v \in X \\ v \neq s \end{array}\right\} 0 = \sum_{v \xrightarrow{e}} f(e) - \sum_{\xrightarrow{e} v} f(e)$

Σ

$m_f = \sum_{X \xrightarrow{e}} f(e) - \sum_{\xrightarrow{e} X} f(e)$



Def X vágás



$c(X) = \sum_{X \xrightarrow{e}} c(e)$ vágás kapacitása

Áll X vágás, f folyam $\Big\}\ m_f \le c(X)$

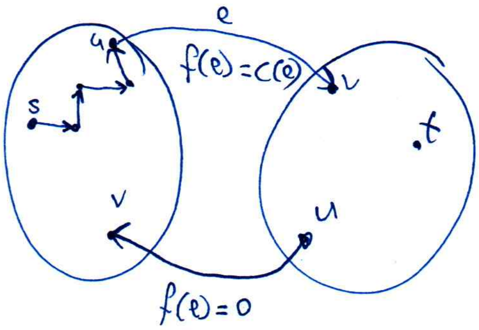
Biz $m_f = \sum_{X \xrightarrow{e}} f(e) - \sum_{X \xleftarrow{e}} f(e) \le \sum_{X \xrightarrow{e}} c(e) - \sum_{X \xleftarrow{e}} 0 = c(X)$

Tétel f-re nézve nincs jav. út $\Rightarrow f$ max folyam

Biz $m_f = d$ célunk: X vágás, amire $c(X) = d$

ha ez sikerül: $\forall f'$ folyamra: $m_{f'} \le c(X) = d$

$X := \{ v : s$-ből v-be vezet ir. út H_f-ben$\}$ | $s \in X$, $t \notin X$



$e(u,v)$, $u \in X$, $v \notin X$
$\Rightarrow e \notin E(H_f) \Rightarrow f(e) = c(e)$

$e=(u,v)$, $u \notin X$, $v \in X$
$\Rightarrow \bar{e} = (v,u) \notin E(H_f) \Rightarrow f(e) = 0$

$d = m_f = \sum - \sum = \sum c(e) - \sum 0 = c(X)$

$X = \{s, A, B, D\}$ $c(X) = 10$

Bsz ea

2022.04.2[illegible]
2

Tétel: (Edmonds-Karp, Dinitz)

Ha H_f-ben mindig a legrövidebb $s \to t$ utak egyikéből választjuk ki a javítóutat, akkor az alg. megáll $\leq n \cdot m$ javítás után

csúcsszám élszám

Tétel

$$\max\{m_f\} = \min\{c(x)\}$$

f folyam   c vágás

Biz alg $\rightsquigarrow f$, $m_f = d$

X: X, $c(X) = d$

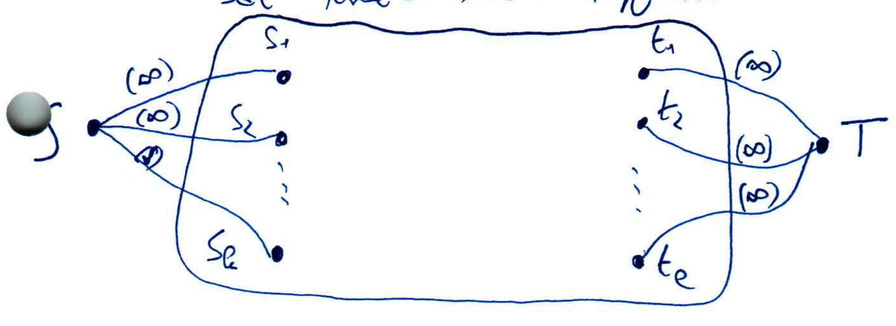
$$d \leq \max m_f \leq \min c(X) \leq d$$

EGÉSZÉRTÉKŰSÉGI Lemma (egér lemma)

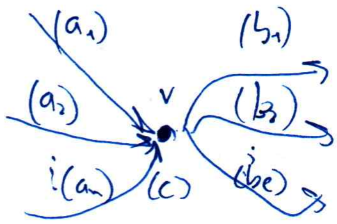
Ha $\forall e$: $c(e) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ van olyan maximális folyam, amire $\forall e$: $f(e) \in \mathbb{Z}$

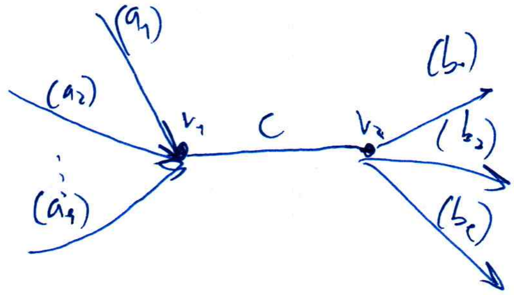
Biz: az algoritmus a működése során csak egész számokat állít elő. (Ha a kezdeti folyam is csupa egész) $\delta \in \mathbb{Z}$

Sok termelő / sok fogyasztó

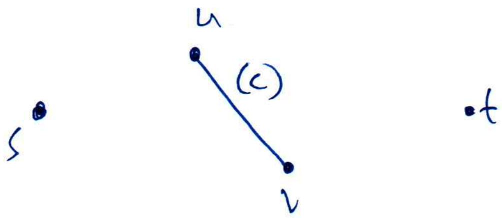


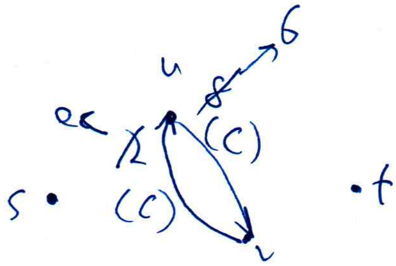
Csúcsok kapacitása





Irányítatlan élek





BSz en

2022.05.02
1

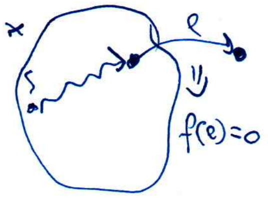
Input G irányított gráf, $s,t\in V(G)$, $k\geq 1$ egész

Output k éldiszjunkt $s\to t$ út
(semelyik kettőnek nincs közös éle)

Lemma f folyam, $m_f\geq k\geq 1$, $\forall e$ élre $f(e)\in\{0,1\}$ $\Rightarrow$ $\exists k$ éldiszjunkt ~~út~~ s-t út, ~~amik~~ amiknek $\forall$ élére $f(e)=1$

Biz G_f: azon élek, melyekre $f(e)=1$

$X:=\{v: v$ elérhető s-ből G_f-ben$\}$ indirekt: $t\notin X$



$$m_f=\sum_{\text{e kilép}} f(e)-\sum_{\text{e belép}} f(e)\leq 0$$

$\boxed{P_1}$ ~~út~~ $s\to t$ út G_f-ben, P_1 éleire $f(e)\leftarrow 0$

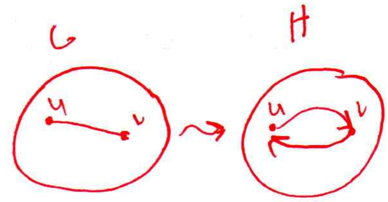
Ekkor f folyam marad, $m_f=k-1$

Ha $k-1\geq 1\Rightarrow\boxed{P_2}$ út (módosított) G_f-ben, éleire $f(e)\leftarrow 0$

Def $Z\subseteq E(G)$ az s-ből t-be vezető utakat lefogó élhalmaz, ha $\forall$ $s\to t$ út tartalmaz (≥ 1 db) Z-beli élt.

Tétel G irányított irányítatlan gráf, $k\geq 1$, $s,t\in V(G)$

Ekkor ekvivalensek



(1) $\exists$ k db éldiszjunkt s-t út
(2) $\nexists$ $(k-1)$ élű, az s-t utakat lefogó élhalmaz
(3) (G H, s,t, $c\equiv 1$) hálózatban a max folyam értéke $\geq k$

Biz

(1)⇒(2)

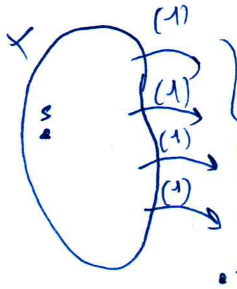
$P_1,\dots,P_\ell$ $s\to t$ éldiszjunkt utak

Z: s-t utakat lefogó élhalmaz

Z tartalmaz élt $P_1,\dots,P_\ell$-ből (is), ezek éldiszjunktak ⇒ $|Z|\geq \ell$

(2)⇒(3)

X tetsz. vágás → H gráfban



lefogják az s-t utakat ⇒ $\geq \ell$ van belőlük

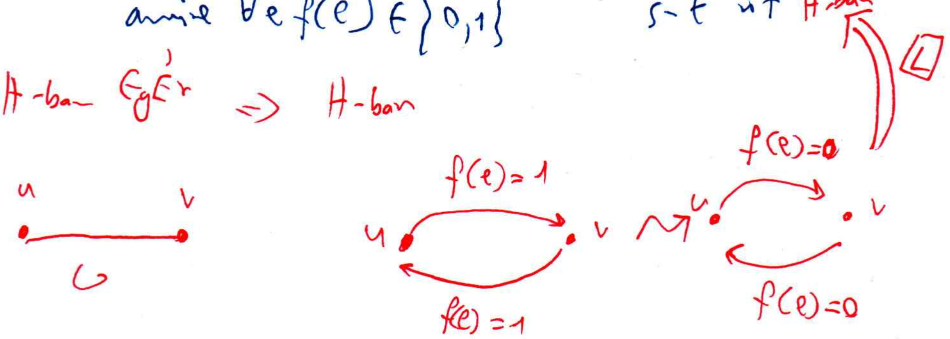
⇒ $c(X)\geq \ell$

⇒ min vágás $\geq \ell \overset{F-F}{\Longrightarrow}$ max folyamérték $\geq \ell$

(3)⇒(1) ⇒ ∃ ℓ értékű f-folyam $\boxed{I}$ ⇒ ∃ ℓ éldiszjunkt s-t út H-ban

amire $\forall e\ f(e)\in\{0,1\}$

H-ban EgÉr ⇒ H-ban



0

$\lambda_G(s,t)$: $s\to t$ éldiszjunkt utak max száma

$\lambda'_G(s,t)$: $s\to t$ utakat lefogó élhalmazok min. ~~száma~~ mérete

Tétel G (irányított/irányítatlan) $\boxed{\lambda_G(s,t)} = \lambda'_G(s,t)$

Biz $\ell\geq 1$ tetsz.

$\lambda_G(s,t)\geq \ell \iff$ van ℓ db $s\to t$ éld. út

$\lambda'_G(s,t)\geq \ell \iff \nexists$ $\ell-1$ élű s-t utakat lefogó élhalmaz

Def $X \subseteq V(G)$ s-t utakat lefogó csúcshalmaz, ha $\forall$ s-t út tartalmaz X-beli csúcsot, $s,t \notin X$

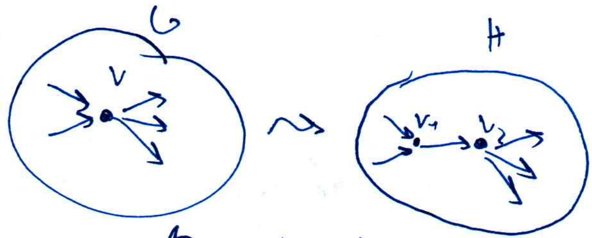
Tétel G irányított/irányítatlan gráf, $k \geq 1$, $s,t \in V(G)$
$(s,t)/\{s,t\} \notin E(G)$, Ekvivalensek:

(1) $\exists$ k db pontdiszjunkt s-t út

(2) $\nexists$ $(k-1)$ csúcsú, az s-t utakat lefogó csúcshalmaz

(3) max folyam $\geq k$ $(H, s, t, c \equiv 1)$

irányított eset



irányítatlan eset: $G \xrightarrow{\leftrightarrows} G' \xrightarrow[\text{szétHúzás}]{\text{pont}} H$

Biz: $\emptyset$

— . —

$\kappa_G(s,t)$: $s \rightarrow t$ pontdiszjunkt utak max. száma

$\kappa'_G(s,t)$: s-t utakat lefogó ponthalmazok minimális mérete

Tétel: $\kappa_G(s,t) = \kappa'_G(s,t)$ (s—t nincs)

Def G irányítatlan gráf, $k \geq 1$ egész

G k-élösszefüggő: bárhogyan $\leq k-1$ élt törölve öf gráfot kapunk

k-(pont)összefüggő —— " —— csúcsot —— " ——

ÉS $|V(G)| \geq k+1$ □

—— . ——

G:  G NEM 4-élöf

3-élöf? IGEN (...)

⇓

G NEM 3-öf

2-öf IGEN (...) □

—— . ——

$\lambda(G)$: maximális k, amelyre G k-élöf.

$\kappa(G)$ —— " —— k-öf

—— . ——

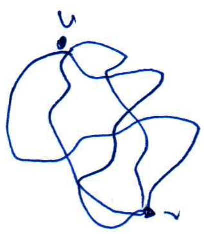
Tétel G irányítatlan gráf, $k \geq 1$ egész

(1) k-élöf $\Longleftrightarrow$ bármely 2 csúcs között $\exists$ k db éldiszjunkt út

(2) k-öf $\Longleftrightarrow$ —— " —— pontdiszjunkt út

$|V(G)| \geq k+1$

Biz (1) $\Leftarrow$ k-1 él $\boxed{DEL}$



u és v között futó k éldiszjunkt útból ≥ 1 érintetlen $\Rightarrow$ u-v út (tetsz. u-v) öf kész

$\Rightarrow$ s, t tetsz.

s-t NEM fogható le $\leq k-1$ éllel, különben $\leq k-1$ él törlésével elrontható az öf. $\overset{\boxed{T}}{\Rightarrow}$ $\exists$ k db éld. s-t út

Kör. k-öf $\Rightarrow$ k-élöf

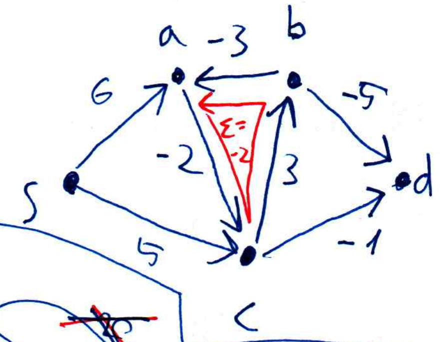
Input: G irányított gráf, $s \in V(G)$

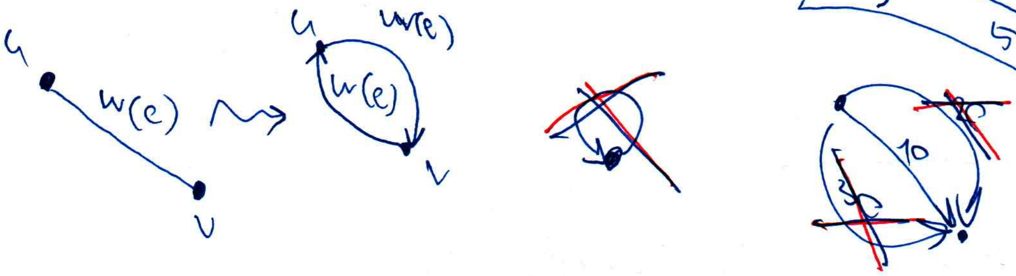
$w: E \to \mathbb{R}$, w konzervatív

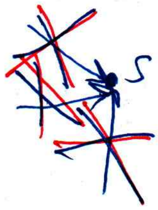
P út $s \rightsquigarrow v$ hossza: $w(P) := \sum \{ w(e) : e\ P\text{-n van} \}$

$t(v) := \min \{ w(P) : P\ s \to v \text{ út} \}$ $\min \emptyset = \infty$

Output: $\forall v$: $t(v)$, $m(v)$



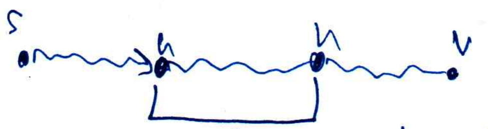




Def: w konzervatív, ha nincs negatív összhosszúságú irányított kör

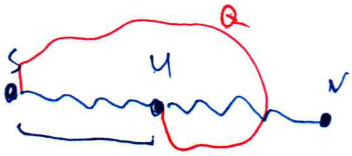
Áll: w konzervatív, Q élsorozat $s \to v$, $w(Q) = t$, k élű $\Big\} \Rightarrow \exists P\ s \to v$ út, $w(P) \leq t$, $\leq k$ élű

Biz: Q út ✓ u: legkorábban ismétlődő pont



↳ irányított kör, összhossz nemnegatív → DEL

$w(Q') \leq w(Q)$, $\leq k$ élű stb... → végén: P

Áll p:  legrövidebb $s \rightarrow v$ út

$P_u \Rightarrow P_u$ legrövidebb $s \rightarrow u$ út

$\boxed{w \text{ konzervatív}}$

Biz indirekt: Q rövidebb

$$w\left(s \overset{Q}{\rightsquigarrow} u \overset{P \text{ vége}}{\rightsquigarrow} v\right) < w(P) \; ↯$$

———— o ————

$m(v) := s \rightarrow v$ legrövidebb utak egyikén az utolsó előtti csúcs

———— o ————

Bellman-Ford algoritmus:

$t_k(v)$: $s \rightarrow v \leq k$ élű utak/élsorozatok közül a legrövidebb hossza

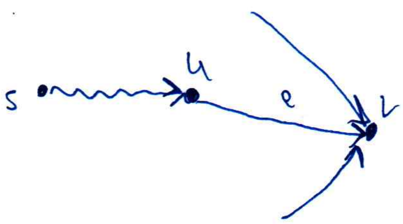
$$t_0(v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } v = s \\ \infty, & \text{ha } v \neq s \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \; \leq n-1$ élű

$$t(v) = t_{n-1}(v) \quad \forall v$$

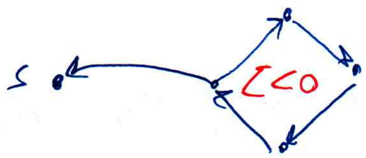
Áll $t_{k+1}(v) = \min\{t_k(u) + w(e) : e = (u, v)\}$

Biz



P: e-n megérkező $\leq k+1$ élű utak/élsorozatok közül a legrövidebb

$P_u \leq k$ élű $s \rightarrow u$, ezek között a legrövidebb



ÁØ ∃ s-ből elérhető negatív kör $\iff \exists v: t_n(v) \leq t_{n+1}(v)$

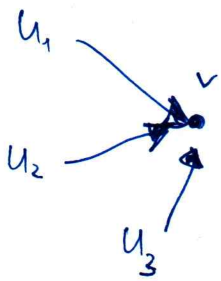
$\Leftarrow$: az alg. helyes

$\Rightarrow$: sosem stabilizálódik

---

n csúcsú, m élű

„be-szomszédsági lista”

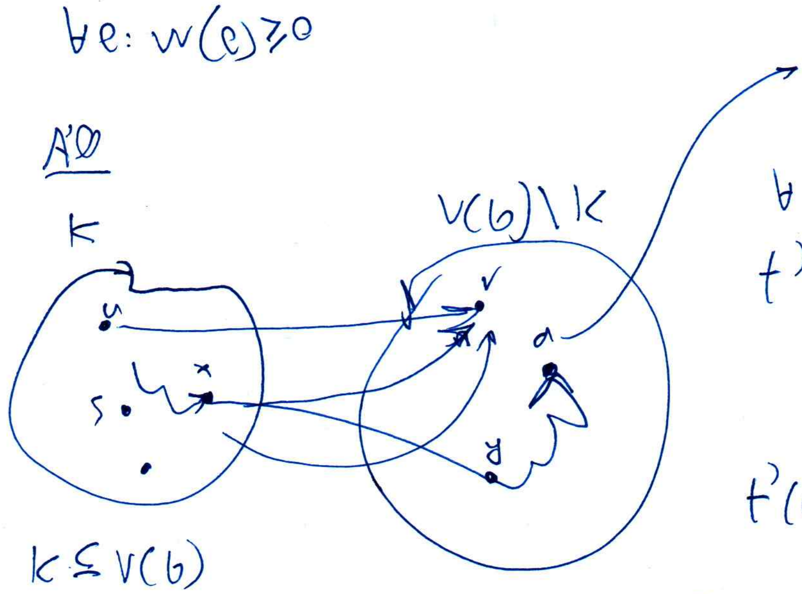


$u \mapsto [u_1, w(e_1)], \dots,$

Dijkstra algoritmus

$\forall e: w(e) \geq 0$

ÁØ



$\forall v \notin K$

$t'(v) = \min\{t(u) + w(e):$

$e = (u, v), u \in K\}$

$t'(a) = \min\{t'(v) : v \notin K\}$

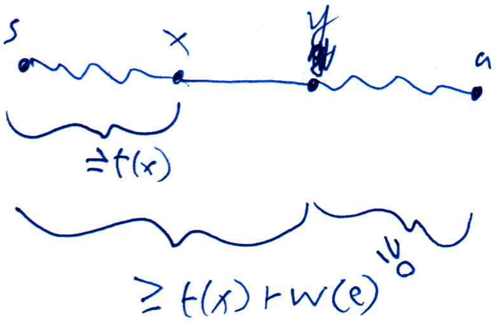
$K \subseteq V(G)$

$\emptyset \neq K \neq V(G)$

Ekkor $t'(a) = t(a)$

Biz $t(a)$ hosszú út van $s \to a$

p: tetsz. $s \to a$ út, először a K-t az $e=(x,y)$ élen hagyja el

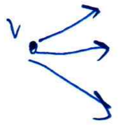


$w(p) \geq t(x) + w(e) \geq t'(y) \geq t'(a)$ ✓

Futásidő

$m \leq n(n-1)$ #

szomsz. lista



kék: $\leq c_1 \cdot m$

piros: $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2} \leq c_2 \cdot n^2$

$\sum \leq c \cdot n^2$

B-F: $c \cdot n \cdot m$

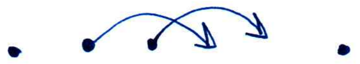
BSz ea

2022.05.16

1

Def G irányított gráf aciklikus, ha nincs benne irányított kör

— e —



Def G irányított gráf csúcsainak a $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ sorrendje topologikus sorrend, ha $\forall e = (v_i, v_j) \in E(G)$ teljesül $j > i$

Tétel G-nek van topologikus sorrendje $\Leftrightarrow$ G aciklikus

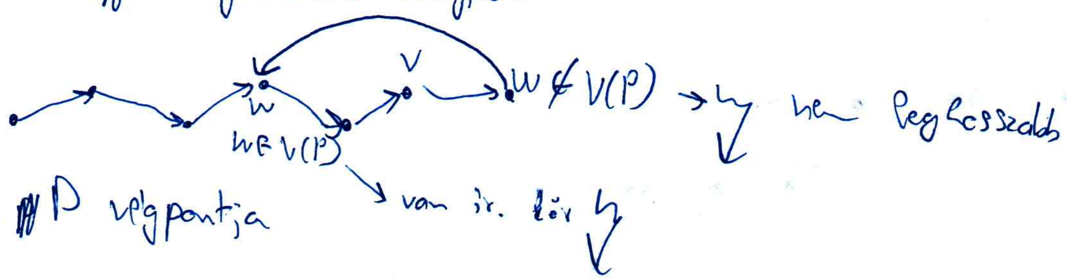
Biz $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$:

→• ki-foka 0

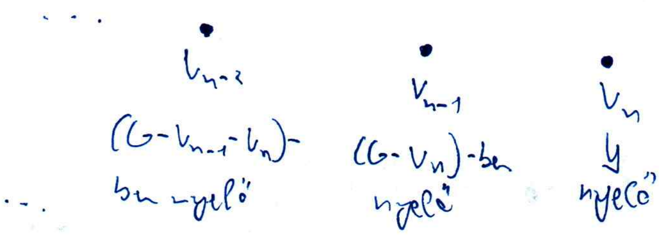
Lemma: G aciklikus $\Rightarrow$ G-ben van nyelő

Biz P: egyik leghosszabb irányított út



v: P végpontja

— o —



v_{n-2} $(G - v_{n-1} - v_n)$-ben nyelő

v_{n-1} $(G - v_n)$-ben nyelő

v_n G nyelő

Legrosszabb

Legrövidebb út aciklikus gráfban

Input: G ir. gráf $(s = v_1, v_2, \dots, v_n)$ $w: E \to R$ topologikus sorrend

$t(s) \leftarrow 0$ ($s = v_1$)

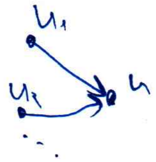
ciklus i: fut 2-től n-ig

$t(v_i) \leftarrow \overset{max}{\min} \{ t(v_j) + w(e) : e = (v_j, v_i) \}$

ciklus vége

---

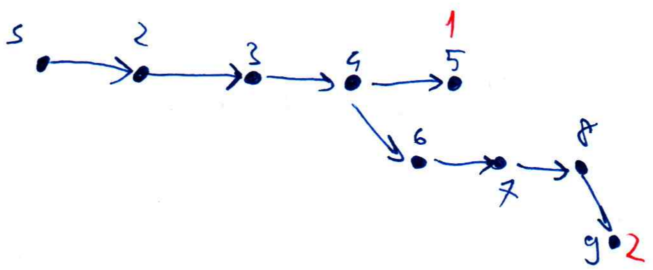
szomszédsági l. $u \to$ | u_1 | u_2 | $u_3 \dots$ |



lépésszám $\leq c(\underbrace{n}_{\text{csúcs}} + \underbrace{m}_{\text{él}})$

Mélységi keresés (DFS)

~~kezdési szám~~
mélységi szám
befejezési szám



DFS-erdő $\to F$ $\quad \underbrace{(m(v), v)}_{\text{faél}}$ élek

1, faél: $e \in E(F)$ $e = a \xrightarrow{e} v \iff d(v) = *$

2, előre él: (nem faél) v elérhető a-ból F-ben $\iff d(v) > d(a)$

3, visszaél: (nem faél) a elérhető v-ből F-ben $\iff d(v) < d(a)$ $f(v) = *$

4, keresztél: a és v nem elérhetők egymásból F-ben $\iff d(v) < d(a)$ $f(v) \neq *$

Tétel: DFS fut

(1) aciklikus $\Leftrightarrow$ $\nexists$ visszaél

(2) ha nincs visszaél $\Rightarrow$ $f(v)$-k szerinti csökkenő sorrend topologikus sorrend

Biz (1) $\Rightarrow$ ✓ (2) ... $\Rightarrow$ (1) $\Leftarrow$

(2)

a, v előre $\Rightarrow$ $f(a) > f(v)$

v, a keresztél $\Rightarrow$ $f(a) > f(v)$ ✓