Követelmények: http://cs.bme.hu/bsz1

2ZH → félév fele, vége

↳ 6 feladat, 10 pont/f.
↳ 2ZH átlaga 24 pont, → aláírás

Vizsga → szóbeli
Jegy: 60% vizsga 40% ZH

Oszthatóság

$a, b \in \mathbb{Z}$

a osztója b-nek: $\exists c \in \mathbb{Z}$ $a \cdot c = b$

Jele: $a | b$

Pl.: $9|36$ $9|-36$ $9|0$ $0|0$

Valódi osztó: $1 < |a| < |b|$

Prímszám:

$p \in \mathbb{Z}$, $|p| > 1$

p prímszám, ha nincs valódi osztója (egyébként összetett szám)

Pl.: $p = 13, -13$

Tétel: (Számelmélet alaptétele)

Minden $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > 1$ felírható prímek szorzataként, és ez a felbontás sorrendtől és előjelektől eltekintve egyértelmű

Biz (felbonthatóság): $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > 1$

$n \xrightarrow{\text{összetett}} n = a \cdot b$ $(1 < |a|, |b| < |n|)$ $\xrightarrow{a \text{ nem prím}} n = a_1 \cdot a_2 \cdot b \ldots$

$\downarrow$ a, b prím → kész

prím → kész

Kongruencia $a \equiv b \pmod{m}$ $m \neq 0$

(1. def)
a és b m szerinti osztási maradéka azonos

$17 \equiv 52 \ (7)$
$-67 \equiv 52 \ (7)$

a/b $a = k \cdot m + r$ $0 \leq r < |m|$

(2. def) $a \equiv b \ (m)$, ha
$m \mid a - b$

Tétel: def1 $\Leftrightarrow$ def2

Biz: $\left.\begin{aligned} a &= k \cdot m + r_1 \\ b &= l \cdot m + r_2 \end{aligned}\right\}$ $0 \leq r_1, r_2 < |m|$

feltehető: $r_1 \geq r_2$

$a - b = (k - l)m + \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\text{nemnegatív}}$

$a \equiv b \ (m) \xrightarrow{\text{def1}} r_1 = r_2$

$a \equiv b \ (m) \xrightarrow{\text{def2}} r_1 - r_2 = 0$

$r_1 = r_2 \Leftrightarrow r_1 - r_2 = 0$

Tétel $a \equiv b \ (m)$
$c \equiv d \ (m)$

$k \geq 1$

Ekkor:
I. $a + c \equiv b + d \ (m)$
II. $a - c \equiv b - d \ (m)$
III. $a \cdot c \equiv b \cdot d \ (m)$
IV. $a^k \equiv b^k \ (m)$

Biz

(I, II.)
$a \equiv b \ (m) \Rightarrow m \mid a-b$
$c \equiv d \ (m) \Rightarrow m \mid c-d$
$\Big\}$ $+$ $m \mid (a-b) \pm (c-d) =$

$= a \pm c - (b \pm d) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \ (m)$ (I, II. állítás ✓)

(III.)
$a \equiv b \ (m) \Rightarrow m \mid a-b \overset{\cdot c}{\Rightarrow} m \mid (a-b) \cdot c = ac - bc$
$c \equiv d \ (m) \Rightarrow m \mid c-d \overset{\cdot b}{\Rightarrow} m \mid (c-d) \cdot b = bc - bd$
$\Big\}$ $+$

$m \mid ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd \ (m)$ (III. állítás ✓)

(IV.)

k db $\left\{ \begin{array}{l} a \equiv b \ (m) \\ a \equiv b \ (m) \\ \vdots \\ a \equiv b \ (m) \end{array} \right.$ $\Big\}$ $a^2 \equiv b^2 \ (m)$ $\vdots$ $\Big\}$ $a^k \equiv b^k \ (m)$

Pl.: 100^{100} 11-gyel oszt. m.

$100 \equiv 1 \ (\text{mod } 11)$
$100^{100} \equiv 1^{100} \ (11)$
$100^{100} \equiv 1 \ (\text{mod } 11)$ $\rightarrow$ $\boxed{1}$

$a \cdot c \equiv b \cdot c \ (m) \not\Rightarrow a \equiv b \ (m)$

$40 \equiv 100 \ (15) \ /:20 \rightarrow 2 \equiv 5 \left(\frac{15}{5}\right)$ $2 \equiv 5 \ (3)$ ✓

$\cancel{2 \equiv 5 \ (15)}$

Tétel: $ac \equiv bc \ (m) \Leftrightarrow a \equiv b \left(\frac{m}{(m,c)}\right)$

$(m,c) \rightarrow$ LNKO

$\Uparrow$

Biz

$$m \mid ac - bc = c(a-b) \rightsquigarrow m \cdot k = c(a-b)$$
$$\Updownarrow$$
$$m' \mid c'(a-b) \rightsquigarrow m' k = c'(a-b)$$
$$\Updownarrow$$
$$m' \mid a-b \Leftrightarrow a \equiv b \ (m')$$

$d = (m, c)$ LNKO

$\frac{m}{d} = m'$ $\frac{c}{d} = c'$

$(m', c') = 1$

nincs közös prímtény.

Tétel: végtelen sok prímszám van

Biz indirekt

TFH: véges sok prím van: $p_1, p_2, p_3 \dots p_k$ (mind pozitív)

$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$

$\to$ N nem prím $N > p_i$

N-nek van prímosztója

N minden prímmel osztva 1 maradékot ad $\Big\}$ ↯ ELLENTMONDÁS!!

Bsz 1 előadás

Euler-Fermat-tétel

2021.09.16.
1

$$(a,m)=1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \quad (m)$$

Def: $m>1$ $(m \in \mathbb{Z})$

$\varphi(m)$: 1-től m-ig relatív prímek száma

$\varphi(10)=4$ $\quad \boxed{1}, \cancel{2}, \boxed{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \boxed{7}, \cancel{8}, \boxed{9}, \cancel{10}$

p prím

$\varphi(p)=p-1$ $\quad 1, 2, \dots \cancel{p}$

$\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - \frac{p^{\alpha}}{p} = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$ $\quad 1, 2, \dots \cancel{p} \dots \cancel{2p} \dots \cancel{p^{\alpha}}$

Tétel: $(a,b)=1 \Rightarrow \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

$\varphi(100) = \varphi(2^2 5^2) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5^2) = (2^2-2) \cdot (5^2-5) = 40$

$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$

$\varphi(m) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \dots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} a=17 \\ m=100 \\ (17,100)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 17^{40} \equiv 1 \quad (100)$$

Lemma $a \equiv b \ (m) \Rightarrow (a,m) = (b,m)$

Biz

$$\left.\begin{array}{l} d \mid a \\ d \mid m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} d \mid a + m \cdot k = b \\ d \mid m \end{array}$$

$m \mid b-a$

$m \cdot k + a = b$

$$\left\{\begin{array}{c} a, m \text{ közös} \\ \text{osztói} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} b, m \text{ közös} \\ \text{osztói} \end{array}\right\}$$

Def: Redukált maradékrendszer (RMR)

$\{c_1, c_2, \dots c_k\}$

1, $(c_i, m) = 1$

2, $c_i \not\equiv c_j \ (m)$ ha $i \neq j$

3, $k = \varphi(m)$

RMR mod 10

Lemma $\{c_1, c_2, \dots c_k\}$ RMR mod m, $(a,m) = 1$

Ekkor: $\{a \cdot c_1, a \cdot c_2, \dots, a \cdot c_k\}$ RMR mod m

Pl.: $1 \to 7$ $\quad 1 \equiv 21 \ (m)$

$a = 7$ $\quad 3 \to 21$ $\quad 3 \equiv 63 \ (m)$

$7 \to 49$ $\quad \vdots$

$9 \to 63$

Biz (E-F) adott $(a,m) = 1$

$\{c_1, c_2, \dots c_k\}$ RMR mod m

$\boxed{L}$

$\Rightarrow \{a \cdot c_1, a \cdot c_2, \dots a \cdot c_k\}$ RMR mod m

$c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_k \equiv (a \cdot c_1)(a \cdot c_2) \cdot \dots \cdot (a \cdot c_k) \ (m)$

$\cancel{c_1 \cdot c_2 \cdot \dots} \cdot c_k \equiv a^k \cancel{(c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_k)} \ (m) \quad / : (c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_k) \qquad ((c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_k), m) = 1$ SzAT

$k = \varphi(m) \qquad 1 \equiv a^k \ (m)$

Biz (Lemma): 1, $\left.\begin{matrix} (c_i, m) = 1 \\ (a, m) = 1 \end{matrix}\right\}$ SzAT $(a \cdot c_i, m) = 1$

2, $a \cdot c_i \equiv a \cdot c_j \ (m) \quad / : a \qquad (a,m) = 1$

$c_i \equiv c_j \quad (m) \Rightarrow c_i = c_j$

3, $k = \varphi(m)$

BSZ 1 előadás

2021.05.16
2

Kis Fermat-tétel

$m = p$ prím

$\underbrace{(a,p)=1}_{p \nmid a} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \ (p) \quad / \cdot a$

$a^{p} \equiv a \ (p)$

Ha $p \mid a$ $\quad a^{p} \equiv 0 \equiv a \ (p)$

Tétel

Lineáris kongruenciák

$ax \equiv b \ (m)$

Tétel $\underset{\text{megoldható}}{ax \equiv b \ (m)} \Leftrightarrow \overbrace{(a,m)}^{d} \mid b$

Pl.: $8x \equiv 30 \ (28)$

$4 = (8,28) \nmid 30$?

Biz: $\boxed{\Rightarrow}$ tfh x_0 megoldás

$ax_1 \equiv b \ (m) \Rightarrow b = \underbrace{\overset{d|}{a}x_1 + k \cdot \overset{d|}{m}}_{d|}$

$d \mid b \Leftarrow$

$\boxed{\Leftarrow}$ 1. eset $(a,m)=1$

$x := a^{\varphi(m)-1} \cdot b$

$ax = a \cdot a^{\varphi(m)-1} \cdot b = a^{\varphi(m)} \cdot b \equiv b$

$\underset{\text{E-F}}{b}$

2.eset $(a,m)=d \mid b$ $d>1$ $\underbrace{\frac{a}{d}=a' \quad \frac{m}{d}=m' \quad \frac{b}{d}=b'}_{(a',m')=1}$

$ax \equiv b \ (m) \quad /:d$

$\Updownarrow$

$a'x \equiv b' \ (m') \qquad \frac{m}{(m,d)} = \frac{m}{d} = m'$

$\hookrightarrow$ megoldható

Tétel: Ha $(a,b) \mid b$, akkor az $ax \equiv b \ (m)$ megoldásainak száma mod $m : (a,m)$

~~...~~ Szimultán kongruenciarendszerek

$x \equiv 3 \ (7) \rightsquigarrow x = 7k+3 \ (k \in \mathbb{Z})$

$x \equiv -1 \ (8)$

$7k+3 \equiv -1 \ (8) \quad /-3$

$7k \equiv -4 \ (8)$

$-k \equiv -4 \ (8) \quad /\cdot(-1)$

$k \equiv 4 \ (8) \to k = 8l+4 \ (l \in \mathbb{Z})$

$x = 7(8l+4)+3 =$
$= 56l+31$
$\boxed{x \equiv 31 \ (56)}$

Hatékony algoritmus def: Algoritmus akkor polinomiális futásidejű, ha létezik olyan ~~...~~ $c, k \geq 0 \to c \cdot n^k$ = futásidő

pl.: írásbeli összeadás

k és l jegyű szám: input mérete: $n = k+l$

lépésszám: $\leq c \cdot k \leq c \cdot n = c \cdot n^1$

Pl.: alaosztófa módszer

N: n-jegyű

$\sqrt{N}$ osztásra lehet szükség

$$\sqrt{N} \geq \sqrt{10^{n-1}} = \left(\sqrt{10}\right)^{n-1} > 2^n \quad (\text{ha } n \geq 3)$$

NEM polinomiális

BSz előadás

2021.05.22

1

Számelmélet: algoritmus

Egész szám(ok) be → Egész szám(ok) ki

Alapműveletek

Input: a, b $\quad c\cdot n^1$

Output: $\underbrace{\overbrace{a+b, \quad a-b}^{c\cdot n^1}, \quad \overbrace{a\cdot b, \quad \lfloor a/b \rfloor, \quad a \bmod b}^{c\cdot n^2}}_{\text{írásbeli műveletek}}$

a: k jegyű
b: l jegyű } input mérete: $k+l=n$

Output: a^b $\qquad a=2 \to \log 2^b = b\log 2 \geq 10^{l-1}\cdot \lg 2$ ← NICHT GUT :(

~~a^b mod~~

Input: a, b, n
Output: $a^b \bmod n$ } moduláris hatványozás ~~$(a^b \bmod n)$~~

Példa: $3^{25} \equiv ? \ (71)$

$\to 3^1 \equiv 3 \ (71)$ $/()^2$

$3^2 \equiv 9 \ (71)$ $/()^2$

$3^4 \equiv 81 \equiv 10 \ (71)$ $/()^2$

$\to 3^8 \equiv 100 \equiv 29 \ (71)$ $/()^2$

$\to 3^{16} \equiv 841 \equiv 60 \ (71)$ $/()^2$

$25 = 16+8+1$

$3^{25} = 3^{16}\cdot 3^8 \cdot 3^1 \qquad 25 = 11001_2$

$3^9 = 3^1\cdot 3^8 = 3\cdot 29 = 87 \equiv 16$

$\boxed{3^{25}} = 3^{16}\cdot 3^9 \equiv 60\cdot 16 = 960 \equiv \boxed{37} \ (71)$

Ciklusmag: - $\square$-re emelés
- maradékos osztás ×2
- szorzás } $c\cdot n^2$ } $c\cdot n^3$

Hányszor? $\log_2 b \leq c' n$

LNKO

Input a, m $(a \le m)$

Output (a, m)

pl.: $(105, 232) = ?\ 1$

Euklideszi algoritmus

$232 = 2 \cdot 105 + 22$

$105 = 4 \cdot 22 + 17$

$22 = 1 \cdot 17 + 5$

$17 = 3 \cdot 5 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1 + \boxed{0}$

$m = t_1 \cdot a + r_1 \Rightarrow m \equiv r\ (a) \Rightarrow$

$a = t_2 \cdot r_1 + r_2 \Rightarrow a \equiv r_2\ (r_1) \Rightarrow$

$r_1 = t_3 \cdot r_2 + r_3 \Rightarrow r_1 \equiv r_3\ (r_2) \Rightarrow$

$r_2 = t_4\, r_3 + r_4 \Rightarrow \ \ldots$

$\vdots$

$r_{k-2} = t_k \cdot r_{k-1} + \boxed{r_k}$

$r_{k-1} = t_{k+1} \cdot r_k + 0$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow (a, m)$

$\quad \parallel$

$\Rightarrow (r_1, r_2)$

$\Rightarrow (r_3, r_2)$

$\quad \parallel$

$\quad \vdots$

$\quad \parallel$

$\boxed{1}\ (r_{k-1}, r_k)$

$\quad \parallel$

$\quad r_k$

Tétel: $(a, m) = r_k$

$r_1 = \underset{\substack{\vee\!\!\!| \\ 1}}{t_3} \cdot r_2 + r_3 \ge r_2 + r_3 > 2 r_3$

osztások száma $\le 2 \log_2 a \le c \cdot n$

BSZ ea

2021.05.22
2

Lineáris kongruenciák megoldása

$$ax \equiv b \quad (m)$$

Ha $(a,m) \nmid b \Rightarrow$ nincs m.o.

Ha $(a,m) \mid b \Rightarrow \; /:d=(a,m)$

$$\underbrace{a'x \equiv b' \quad (m')}_{(a',m')=1}$$

(*) $232x \equiv 0 \quad (232)$ (✓)

(B) $105x \equiv 1 \quad (232)$

(*)-2(B):(1): $22x \equiv -2 \quad (232)$

(B)-4(1):(2): $17x \equiv 9 \quad (232)$

(1)-1(2):(3): $5x \equiv -11 \quad (232)$

$2x \equiv 42 \quad (232)$

$x \equiv -95 \equiv 137 \quad (232)$

(*) $mx \equiv 0 \quad (m)$

(B) $ax \equiv b \quad (m)$

(*)$-t_1$(B):(1): $r_1 x \equiv c_1 \quad (m)$

(B)$-t_2$(1):(2): $r_2 x \equiv c_2 \quad (m)$

(3) $r_3 x \equiv c_3$

$\vdots$

$k. \; \underset{=1}{r_k} x \equiv c_k \quad (m)$

↳ egyetlen megoldás

Input: m

Output: m prím-e?

~~Tétel~~ E-F-t

$(a,m)=1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \quad (m)$

m prím $\Rightarrow \varphi(m) = m-1$

$a^{m-1} \equiv 1 \quad (m)$

Fermat-teszt → Létezik polinomiális algoritmus

a: random, $1 \le a \le m-1$

↓

$(a,m)=?$ → Eukl. alg → Ha $(a,m) \neq 1$ m NEM prím :)

↓ $(a,m)=1$

$\boxed{a^{m-1} \bmod m \text{ mod. hatv.}}$

Ha $a^{m-1} \not\equiv 1 \quad (m)$

↳ m NEM prím

$a^{m-1} \equiv 1 \quad (m)$

$\boxed{100x}$

Ha 100x egymás után $a^{m-1} \equiv 1 \ (m)$

$\Rightarrow$ STOP „m valószínűleg prím"

Def.: $(a,m)=1$

$a^{m-1} \equiv 1 \ (m) \Rightarrow a$ cinkosa m-nek

$a^{m-1} \not\equiv 1 \ (m) \Rightarrow a$ árulója m-nek

Tétel: Ha m-nek van árulója $\Rightarrow$ hozzá relatív prím számok legalább fele áruló!!

hibavalószínűség $\leq \frac{1}{2^{100}}$

Biz: cinkosok: $c_1, c_2, c_3, \dots c_k$
áruló: a
} van k db különböző áruló

$a_i := a \cdot c_i \bmod m$

$a_i^{m-1} \equiv (a \cdot c_i)^{m-1} = \underset{\not\equiv 1}{a^{m-1}} \cdot \underset{\equiv 1}{c_i^{m-1}} \not\equiv 1 \ (m)$

$\Rightarrow a_i$ áruló

$\boxed{\begin{array}{ll} a_i = a_j & \\ a \cdot c_i \equiv a \cdot c_j & (m) \\ c_i \equiv c_j & (m) \\ c_i = c_j & (1 \leq \dots \leq m) \end{array}}$

Def: Carmichael-szám $\rightsquigarrow$ összetett szám

m — " —, ha minden olyan a-ra, amire $(a,m)=1$ teljesül, hogy $a^{m-1} \equiv 1 \ (m)$

Bajok:
- random generálás
- $\frac{1}{2^{100}}$ hibavalószínűség
- Carmichael-számok $\rightarrow$ Miller-Rabin-teszt
  hatékony polinomiális algoritmus

Bsz ea

2021.05.25
1

Nagy Prímszámtétel

$\pi(n)$ — prímek száma n-ig

$\pi(10) = 4$

$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}}$

$N = p \cdot q \qquad p \neq q$, prím $\quad k \geq 1 \Rightarrow \quad x^{k\varphi(N)+1} \equiv x \ (N)$

Lemma: $(x, N) = 1 \Rightarrow x^{\varphi(N)} \equiv 1 \ (N) \ / \uparrow k$

$x^{k\cdot\varphi(N)} \equiv 1 \ (N)$

1.eset: $x^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv x \ (N)$

2.eset $\quad p|x, \ q|x \Rightarrow p\cdot q | x \Rightarrow N|x$

$x^{?} \equiv 0 \equiv 0 \ (N)$

3.eset $\quad p \nmid x, \ q|x$ $\qquad \varphi(N) = (p-1)(q-1)$

$(p, x) = 1 \Rightarrow x^{p-1} \equiv 1 \ (p) \ / \uparrow (q-1)k$

$x^{k\varphi(N)+1} \equiv x \ (p)$

$$\left.\begin{aligned} p &\,|\, x^{k\varphi(N)+1} - x \\ q &\,|\, x^{k\varphi(N)+1} - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow N = pq \,|\, x^{k\varphi(N)+1} - x$$

$x \xrightarrow{C} C(x) = y \ \rightsquigarrow$ nyilvános

$y \xrightarrow{D} D(y) = x \ \rightsquigarrow$ titkos

Pl. $P_0(2,3,4)$, $v(5,6,7)$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{cases} x = 2+5\lambda \\ y = 3+6\lambda \\ z = 4+7\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$P(7,9,10) \overset{?}{\notin} e$

$$\left.\begin{array}{l} 7 = 2+5\lambda \rightsquigarrow \lambda = 1 \\ 9 = 3+6\lambda \rightsquigarrow \lambda = 1 \\ 10 = 4+7\lambda \rightsquigarrow \lambda = \frac{6}{7} \end{array}\right\} \text{ ~~de~~}$$

$$\boxed{\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{7}} = \lambda$$

Egyenesek egyenletrendszere

$P_0(x_0, y_0, z_0)$
$v(a,b,c)$

1. eset $a,b,c \neq 0$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

2. eset $a,b \neq 0$, $c=0$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \quad z = z_0$$

3. eset $a,b=0$, $c \neq 0$

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

---

x (x,y) (x,y,z)

1D   2D   3D

~~Def~~

Bsz ea

2021.09.29

3

<u>Def:</u> $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1,\ n \in \mathbb{Z})$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\downarrow$

$\underline{v}$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot \underline{v} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \cdot \lambda \\ x_2 \cdot \lambda \\ \vdots \\ x_n \cdot \lambda \end{pmatrix} \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \qquad \underline{v} - \underline{w} = \underline{v} + (-1) \cdot \underline{w}$$

<u>Tétel</u>

1. $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
2. $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
3. $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v}$
4. $(\lambda + \mu)\underline{v} = \lambda \underline{v} + \mu \cdot \underline{v}$
5. $\mu(\lambda \cdot \underline{v}) = (\mu \cdot \lambda)\underline{v}$

Bsz ea

2021.10.06

1

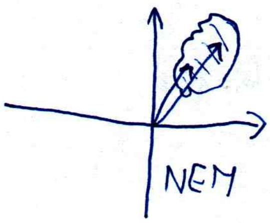
Def: $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \neq \emptyset$

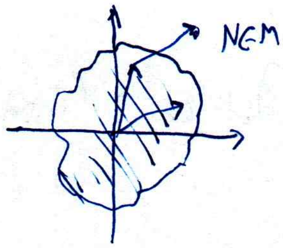
V altér $\mathbb{R}^n$-ben, ha: $\Rightarrow 0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \in V$

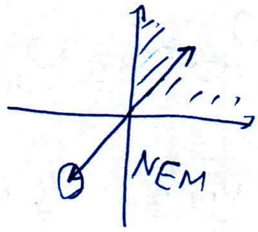
1. $\underline{v}, \underline{w} \in V \Rightarrow (\underline{v} + \underline{w}) \in V$

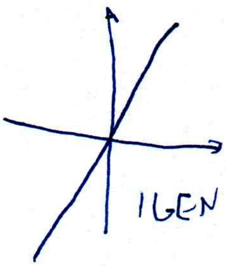
2. $\underline{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \underline{v} \in V$

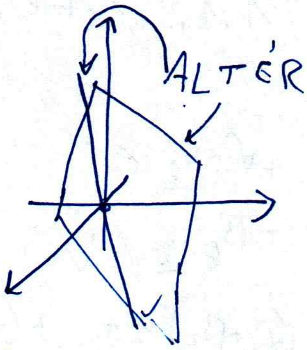
Jele: $V \leq \mathbb{R}^n$











$\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$

Triviális altér

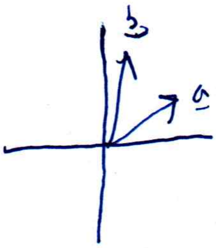
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \right\}$$

$\underline{v} = (x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4) \in V$

$\underline{w} = (y_1 \; y_2 \; y_3 \; y_4) \in V$

$$\underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \lambda \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \lambda \\ x_2 \lambda \\ x_3 \lambda \\ x_4 \lambda \end{pmatrix}$$

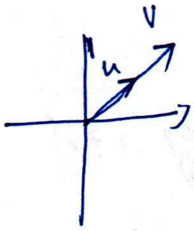
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix}$$



$a \nparallel b$

$\alpha \cdot a + \beta \cdot b$

gen $\mathbb{R}^2$



$u \parallel v$

Def: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_k v_k \rightarrow$ lineáris kombináció

Tétel $v_1, v_2, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$

$V = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$

akkor $V \leq \mathbb{R}^n$

1. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \in V$

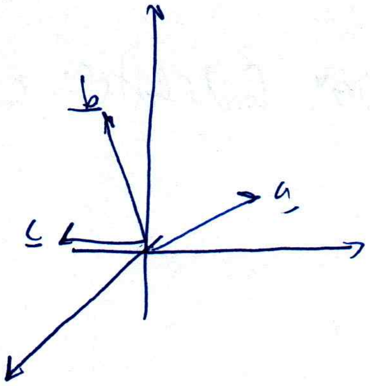
$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k \in V$

$v + w = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) v_k \in V$

Def: V: $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorok generált altere

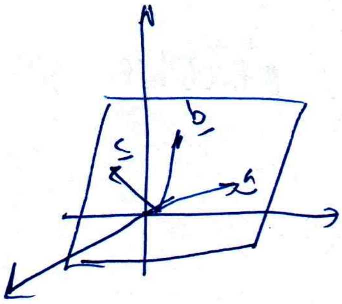
Jele: $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$

Ha V altérre teljesül, hogy $V = \langle v_1, v_2, v_3 \dots v_k \rangle$, akkor $v_1, v_2, v_3, \dots v_k$ a V generátorrendszere



$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nem egysíkúak

$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \mathbb{R}^3$



$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egysíkúak
(nem mind párhuzamos)

$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = S$

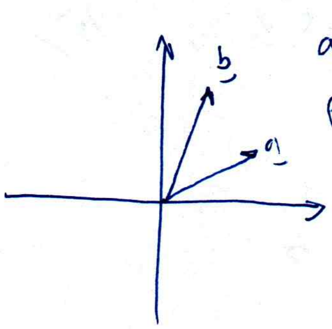
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

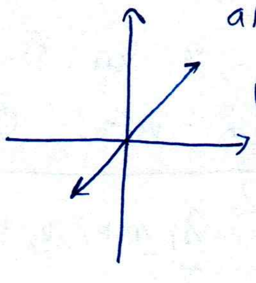
$2\underline{u} + 3\underline{v} + 4\underline{w} = \underline{d}$

1 **Def:** $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ lineárisan függetlenek, ha egyik sem fejezhető ki a többi lin. kom-val

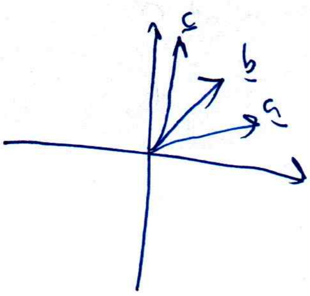
Egyébként: lin. összefüggők



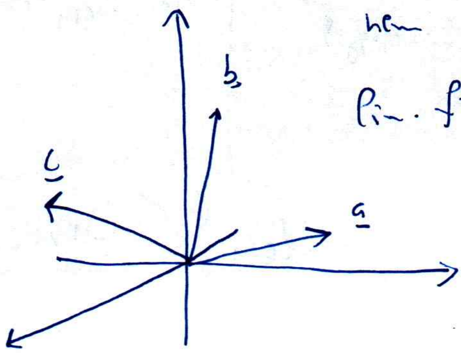
$a \nparallel b$
lin. ftlen.



$a \parallel b$
lin. öf.



lin. öf.



nem egysíkúak
lin. ftlen.

② **Def:** $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ lin. flen.-ek, ha

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k = 0$$ CSAK ÚGY fordulhat elő, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$

Tétel 1. Def $\Leftrightarrow$ 2. Def

Biz: indirekt biz ($\Leftarrow$)

$v_1, \ldots, v_k$ közül valamelyik kifejezhető a többiből, pl: v_1

$$\underline{v}_1 = \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 + \ldots + \alpha_k v_k$$

$$1 \underline{v}_1 - (\alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 + \ldots + \alpha_k v_k) = \underline{0} \quad \lightning$$

($\Rightarrow$)

$\underline{0}$ kifejezhető nem csak csupa 0 együtthatóval is

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$

például $\lambda_k \neq 0$

$$\underline{v}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_k \quad \lightning$$

$\left.\begin{array}{l} \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, v_k \text{ lin. flen.} \\ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, v_k, v_{k+1} \text{ lin. öf.} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v}_{k+1} \in \langle \underline{v}_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$

Újonnan érkező vektor lemmája

Biz $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k + \lambda_{k+1} \underline{v}_{k+1} = 0$

előfordulhat nem mindegyik $\lambda_1 = 0$

Ha $\lambda_{k+1} = 0 \Rightarrow \lambda_1, \ldots \lambda_k$ nem mind 0

$\Downarrow$

$\lambda_{k+1} \neq 0$

$\underline{v}_{k+1} \in \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \rangle$

BSZ ea

2021.10.1?
1

Tétel: $V \leq \mathbb{R}^n$ → F-G egyenlőtlenség

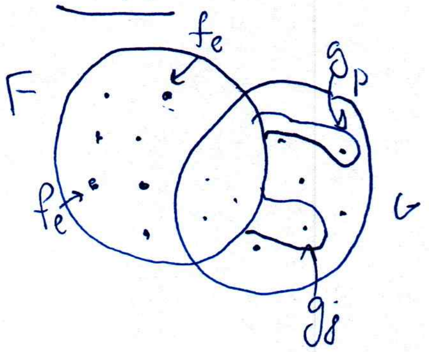
$\left.\begin{matrix} f_1, f_2, f_3, \dots, f_k \in V \quad \text{lin. ftlen.} \\ g_1, g_2, g_3, \dots, g_m \text{ gen. rendszer } V\text{-ben} \end{matrix}\right\} k \leq m$

Kicserélési lemma $V \leq \mathbb{R}^n$

$\left.\begin{matrix} f_1, f_2, f_3, \dots, f_k \in V \text{ lin. ftlen} \\ g_1, g_2, \dots, g_n \text{ gen. rendszer } V\text{-ben} \end{matrix}\right\}$ $\forall f_i$-hez $\exists g_j$, hogy

$f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, g_j, f_{i+1}, \dots, f_k$ lin ftlen

Biz:



$F \xrightarrow[g_j]{f_e} F' \xrightarrow[g_p]{f_e} F'' \to \dots \to F^*$

$G \qquad G \qquad G \qquad G$

$F^* \subseteq G \qquad |F^*| = |F|$

Biz Pl f_k-ra cél: $\exists g_j$ Indirekt: egyik g_j sem jó

g_1 nem jó $\Rightarrow f_1, f_2, \dots, f_{k-1}, g_1$ lin. öf. $\overset{\text{ÚEVL}}{\Longrightarrow} g_1 \in \langle f_1, \dots f_{k-1} \rangle$

g_2 sem jó $\Longrightarrow \quad \Rightarrow g_2 \in \langle f_1, \dots, f_{k-1} \rangle$

$g_m \Rightarrow \quad \Rightarrow g_m \in \langle f_1, \dots, f_{k-1} \rangle$

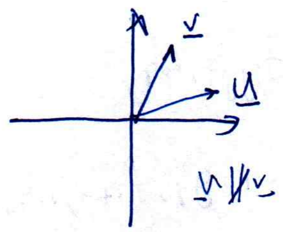
$\Rightarrow f_k \in \langle g_1, g_2, \dots, g_m \rangle \overset{\Sigma\Sigma}{\Longrightarrow} f_k \in \langle f_1, \dots f_{k-1} \rangle$ ↯

Def $V \le \mathbb{R}^n$

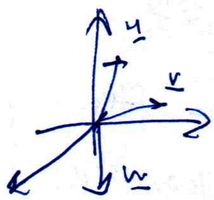
$b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ bázis V-ben, ha

- $b_1, \dots, b_k$ lin. ftlen.
- $b_1, \dots, b_k$ gen rendszer V-ben

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ $\not 1$ síkú

Tétel $V \le \mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} b_1, \dots, b_k \text{ bázis} \\ c_1, c_2, \dots, c_m \text{ bázis} \end{array}\right\} \Rightarrow k = m$$

Biz

$$\left.\begin{array}{l} \text{gen. r. } b_1, \dots, b_k \\ \text{lin. f. } c_1, \dots, c_k \end{array}\right\} \xRightarrow{F\text{-}G} k \le m$$

F-G $\Rightarrow m \le k$

$\Rightarrow k = m$

Def $V \le \mathbb{R}^n$ dimenziója k, ha V-ben van k elemű bázis

Jele: $\dim V = k$

$V = \{\underline{0}\} \le \mathbb{R}^n$

$\dim\{\underline{0}\} = 0$

bázis: $\emptyset$

Bsz ea

2021.10.13

2

$$\begin{array}{ccc} \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \end{array} \qquad \alpha\underline{u}\cdot\beta\underline{v}\cdot\gamma\underline{w} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\alpha+\beta+\gamma\end{pmatrix}$$

$W = \{$bolti blokkok$\} \leq \mathbb{R}^4$

$\left.\begin{array}{l}\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \text{ gen. r.} \\ \underline{v}, \underline{u}, \underline{w}, \text{ is lin. ftlen}\end{array}\right\}$ $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, bázis $\Rightarrow$ $\dim W = 3$

Tétel: $\left.\begin{array}{l} V \leq \mathbb{R}^n \\ b_1, \dots, b_k \text{ bázis } V\text{-ben}\end{array}\right\} \Leftrightarrow$ $\forall \underline{v} \in V$ egyértelműen írható fel $b_1, \dots, b_k$ lineáris kombinációjaként

Biz $\underline{v} \in V$ $\qquad b_1, \dots b_k \Rightarrow \underline{v}$ felírható

$$\underline{v} = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k$$
$$\ominus \quad \underline{v} = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k$$

$$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) b_k$$

lin. ftlen $\Rightarrow$ $\alpha_1 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$
$\vdots$
$\alpha_k - \beta_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = \beta_k$

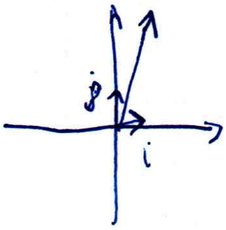
Def $V \leq \mathbb{R}^n$, $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ bázis V-ben, $\underline{v} \in V$

$\underline{v}$ koordinátavektora B szerint $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_k\end{pmatrix}$, ha

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \dots + \alpha_k \cdot b_k$$

Jele: $[\underline{v}]_B$

Pl



$v=(2,6)$

$B\begin{cases} i=(1,0) \\ j=(0,1)\end{cases}$ $[\underline{v}]_B=(2,6)$ $2i+6j=v$

$C\begin{cases} \underline{c}_1=(1,2) \\ \underline{c}_2=(3,4)\end{cases}$ $[\underline{v}]_C=(5,-1)$

Tétel $\left.\begin{array}{l} V\leq \mathbb{R}^n \\ f_1, f_2, \dots, f_k \in V,\ \text{lin ftlen}\end{array}\right\} \Rightarrow$ $f_1,\dots,f_k$ néhány további (lehet 0 is) hozzávételével bázissá egészíthető ki

Biz korban tart: $f_1,\dots,f_k,\dots,f_i \to$ lin ftlen

ciklus eleje

ha $\exists\, \underline{v}\in V$, $\underline{v}\notin \langle f_1, f_2,\dots, f_i\rangle$, akkor:

- $i \leftarrow i+1$
- $f_i \leftarrow v$

egyébként stop

ciklus vége

$\Downarrow$ $f_1,\dots,f_i$ bázis

eljárás megáll:

$\mathbb{R}^n$-ben $e_1, e_2, \dots e_n$ gen. rendszer (standard bázis)

$\Downarrow$ F-G

$\mathbb{R}^n$-ben minden lin. ftlen rendszer $\leq n$ elemű

$\Rightarrow$ eljárás $\leq n-k$ ~~ciklus~~ ciklus után megáll

Köv $V\leq \mathbb{R}^n \Rightarrow V$-nek van bázisa

Biz $f_1\neq 0 \rightsquigarrow$ lin. ftlen $\rightsquigarrow$ bázis $|\ \{0\}=\langle\emptyset\rangle$

Köv: $\left.\begin{array}{l} V\leq \mathbb{R}^n,\ f_1,\dots,f_k \text{ lin ftlen} \\ k=\dim V\end{array}\right\}$ $f_1,\dots,f_k$ bázis

Bsz ea

2021. 10. 13

3

Példa $W=\{\text{belt; bletleg}\}$ dim $W=3$

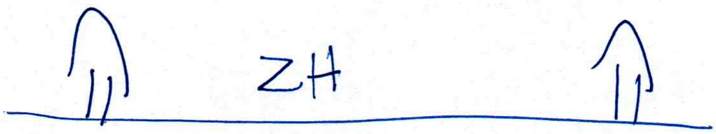
$\underbrace{f_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\9\end{pmatrix}}_{\text{lin ftlen}}$, $f_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

KÖV $\Longrightarrow f_1, f_2, f_3$

$\langle f_1\rangle \neq W$

lin ftlen

lin ftlen



Bsz 1 ea

2021.10.20
1

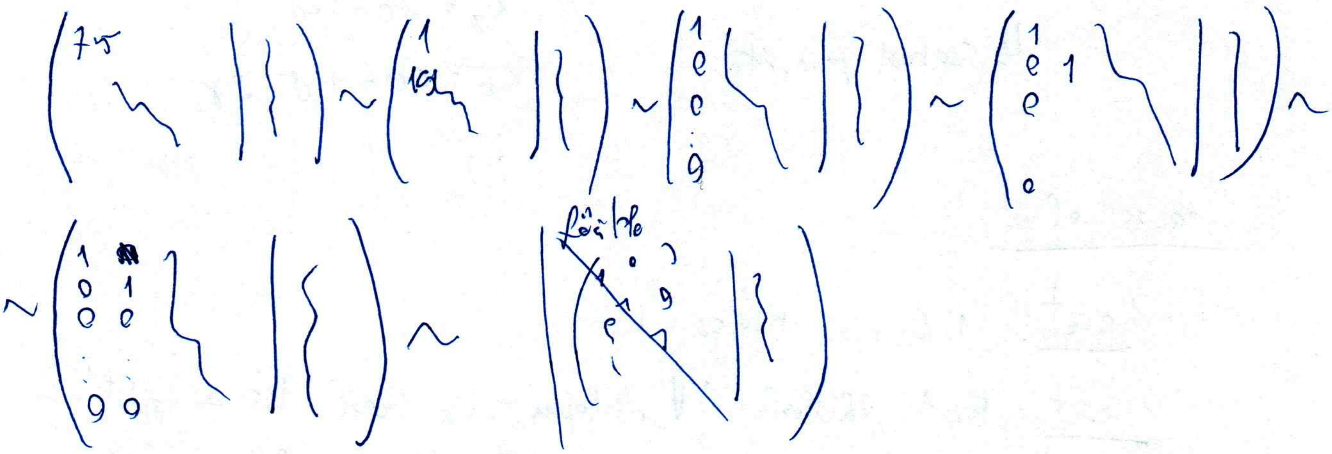
Gauss-elimináció:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k
\end{aligned}
\quad \rightsquigarrow \quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k
\end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrix

Elemi sorekvivalens lépések

1. $\underbrace{i.\text{ sor}} \leftarrow \lambda \cdot \underbrace{i.\text{ sor}} \quad (\lambda \neq 0)$
2. $\underbrace{i.\text{ sor}} \leftarrow \underbrace{i.\text{ sor}} + \lambda \cdot \underbrace{j.\text{ sor}} \quad (j \neq i)$
3. $\underbrace{i.\text{ sor}} \leftrightarrow \underbrace{j.\text{ sor}}$
4. $(0\,0 \dots 0 \,|\, 0)$ sor törlése



Lépcsős alak

vezéregyes & ↓ 0-k

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & & & \end{array}\right)$$

Gauss-elim 2. fázis

Vezér 1-esek feletti nemnulla elemek a 2. lépés egyszeri ~~(alkalmazással)~~ alkalmazásával 0-vá változtatandó

↳ végig lépcsős alak

⇝ Redukált lépcsős alak

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{array}\right)$$

0-k

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 9 & 20 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 11 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 60 \end{array}\right)$$

$x_1 \; x_2 \; \boxed{x_3} \; \boxed{x_4} \; x_5 \; \boxed{x_6} \; x_7 \; x_8 \; \boxed{x_9}$

↳ szabad paraméter

$x_3 = \alpha$

$x_4 = \beta$

$x_6 = \gamma$

$x_9 = \delta$

$x_8 = 60 - 13\delta$

$x_7 = 50 - 12\delta$

$x_5 = 40 - 11\delta - 8\gamma$

$\vdots$

Gauss-elim

1. eset: 1. fázis ⇒ nincs m.o.

2. eset RLA feltételei ∧ ∀ oszlopban van vezér 1-es ⇒ egyértelmű m.o.

3. eset RLA feltételei, van vezér 1-es nélküli oszlop ⇒ ∞ sok m.o.

Tétel

$$\left.\begin{array}{l} k \text{ db egyenlet} \\ n \text{ db ismeretlen} \\ \text{egyenlet mo. hat.} \end{array}\right\} \Rightarrow k \geq n$$

Biz

$$k\left\{\left(\begin{array}{c|} \overbrace{\qquad\qquad}^{n} \\ \\ \\ \end{array}\right)\right. \xrightarrow{\text{Gauss}} k'\left\{\left(\begin{array}{ccc|} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad}^{n}} \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\right.$$

$$k \geq k' = n$$

	nincs m.o.	1 m.o.	∞ m.o.
$k<n$		$\times$	
$k=n$			
$k>n$			

∃ példa

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 12$$
$$-2x_1 + x_2 + 7x_3 + 12x_4 = 50$$
$$3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = p$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 12 \\ -2 & 1 & 7 & 12 & 50 \\ 3 & 6 & -3 & 1 & p \end{array}\right)$$

Egyértelműen megoldható

$(a|b)$ $\quad a\neq 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right)$ $\quad a\cdot d-b\cdot c\neq 0$

$$\begin{array}{c|ccccc|} 1 & & & & 0 & \\ 2 & 0 & & & & \\ 3 & & & & & 0 \\ 4 & & 0 & & & \\ 5 & & & 0 & & \end{array} \longleftrightarrow \underbrace{41523}_{\text{permutáció}} \to n!$$

<u>Def.:</u> A: $n\times n$-es mátrix   DETERMINÁNS

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & & \\ & & a_{ij} \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \qquad \det A = \sum_{\pi:\text{permutáció}} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi_1}\cdot a_{2\pi_2}\cdot a_{3\pi_3}\cdot\ldots\cdot a_{n\pi_n}$$

$\pi = 41523$

$I(\pi)=5$

Def: π permutáció inverziószáma a csökkenő sorrendben álló számpárok száma

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 \end{vmatrix} = +2\cdot 6\cdot 12 - 3\cdot 5\cdot 12 \ldots$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

① csupa nulla sor/oszlop $\longrightarrow$ det $= 0$

$\forall$ szorzatban van $0 \rightarrow$ det $= \pm 0 \pm 0 \pm 0 \ldots = 0$

②

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

felső $\triangle$ alsó $\triangle$

det $= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

főátlón kívül $\forall$ bástyaelhelyezés tartalmaz 0-t

③

$$\left.\begin{array}{l} i.\text{ sor} \leftrightarrow \lambda \cdot i.\text{ sor} \\ j.\text{ oszlop} \leftrightarrow \lambda \cdot j.\text{ oszlop} \end{array}\right\} \det_{új} = \lambda \cdot \det_{régi}$$

Biz.: $\forall$ bástyaelhelyezés egyetlen tagja λ-szorosára változik.

④

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ \alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & \ldots & \alpha_n \cdot \beta_n \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_n \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

⑤

$$\left.\begin{array}{l} i.\text{ sor} \leftrightarrow j.\text{ sor} \\ i.\text{ oszlop} \leftrightarrow j.\text{ oszlop} \end{array}\right\} \Rightarrow \det_{új} = -\det_{régi}$$

$$\begin{array}{c} \\ i. \\ \\ \\ j. \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \boxed{\alpha_k} & \alpha_n \\ \square & & & \\ & & \square & \\ \beta_1 & \beta_2 & \boxed{\beta_\ell} & \beta_n \\ & \square & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & \\ \beta_1 & \beta_2 & \boxed{\beta_\ell} & \beta_n \\ \square & & & \\ & & & \square \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \boxed{\alpha_k} & \\ \square & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Biz: ugyanazok a szorzatok szerepelnek, csak az előjele ellentétes

⑥ $\boxed{i.\text{ sor}} \leftarrow \boxed{i.\text{ sor}} + \lambda \cdot \boxed{j.\text{ sor}} \quad (i \neq j)$

$\boxed{i.\text{ oszlop}} \leftarrow \boxed{i.\text{ oszlop}} + \lambda \cdot \boxed{j.\text{ oszlop}}$ $\Big\}$ $\det_{új} = \det_{régi}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ \alpha_1+\lambda\beta_1 & \alpha_2+\lambda\beta_2 & & \alpha_n+\lambda\beta_n \\ \beta_1 & \beta_2 & & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_n \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_n \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\substack{⑤\ \det = -\det \\ \det = 0}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}_{1 \cdot 1 \cdot 2} = -6$$

Tétel $n\Big\{\Big(\underbrace{A}_{n} \Big| b\Big)$ egyértelműen megoldható $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

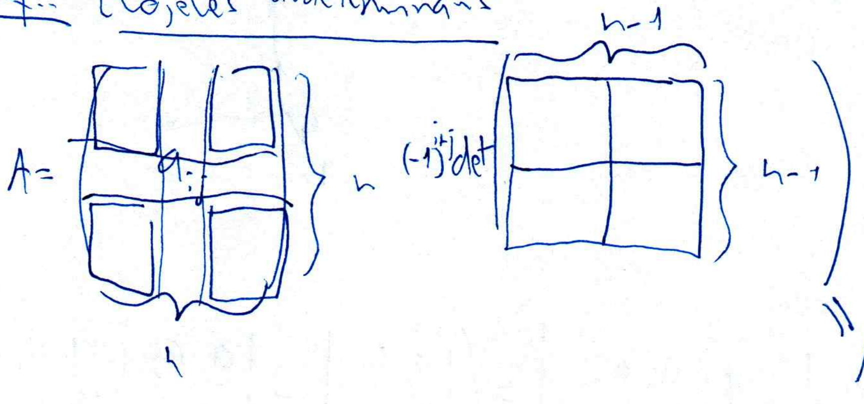
Biz Gauss-elim. sorekvivalens lépései: $\longrightarrow (A|b)$ m.o. halmazát nem változtatja

$\longrightarrow \det A$ nullaságát nem változtatja nincs m.o. $\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \neq 0 \end{array}\right) \Rightarrow \det A = 0$

∞ sok m.o. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \det A = 0$

egyértelmű $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & ? \\ & 1 & & & ? \\ & & 1 & & ? \\ & & & 1 & ? \end{array}\right) \Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow$ kezdetben $\det A \neq 0$

Def.: Előjeles aldetermináns



$$A = \ldots \quad (-1)^{i+j}\det(\ldots) = A_{ij}$$

Sakktábla szabály

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \boxed{e} & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -e\begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + f\begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} - g\begin{vmatrix} a & b & d \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} + h\begin{vmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Kifejtési tétel

$$\det A = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Biz (nem vacakolás)

$$\det A = afkp - celn \pm \ldots = e(-cln + \ldots) + f(alp + \ldots) + g(\ldots) + h(\ldots)$$

Vektoriális szorzat

Def $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$

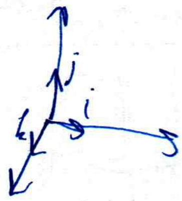
1, $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\sin[\sphericalangle(\underline{a},\underline{b})]$

2, $\underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{a},\underline{b}$

3, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a}\times\underline{b}$ jobbsodrású rendszer

Tétel

$$\underline{a}=(a_1,a_2,a_3)$$
$$\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$$



$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=$$

$$=i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right);$$

Mátrixok

$$A=k\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}}^{n}\right.$$

$\to$ $k\times n$-es mátrix

$\mathbb{R}^{k\times n}$

Def.: $A,B\in\mathbb{R}^{k\times n}$

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{ij} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{ij}+b_{ij} \end{pmatrix}$$

1, $A+B=B+A$

2, $(A+B)+C=A+(B+C)$

3, $\lambda(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$

4, $(\lambda+\mu)A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$

5, $\mu(\lambda A)=(\mu\lambda)A$

$$0=\left.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n}\right\}k \longrightarrow \text{nullmx}$$

$$A+0=0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}=B$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix} \boxed{15} & \\ & \boxed{49} \end{pmatrix}=A\cdot B$$

$$\boxed{}=1\cdot 2+2\cdot(-4)+3\cdot 7=15$$
$$\boxed{}=4\cdot(-3)+5\cdot 5+6\cdot 6=49$$

Def $A\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$

$C\in\mathbb{R}^{k\times m}$

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=B$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=AB$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=BA$$

$$A\cdot B=0 \not\Rightarrow A=0 \text{ v. } B=0$$

Bsz ea

2021.11.03
2

Tétel

1, $(AB)C = A(BC)$

2, $A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$

3, $(\lambda A)B = \lambda(A \cdot B) = A(\lambda \cdot B)$

Def Egységmátrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = A \cdot E$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = E \cdot A$$

Determinánsok szorzástétele

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

FALSCH!!!

NEIN

$\cancel{\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)}$

Transzponálás

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{pmatrix}$$

oszlop → sor

sor → oszlop

Def $A\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times k}$, amire $b_{ij}=a_{ji}$ $\forall ij$

Jele $B=A^T$

$$B=\begin{pmatrix} i & j & k \\ e & m & n \\ o & p & q \\ r & s & t \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \square & \square \end{pmatrix} = AB \qquad \begin{pmatrix} i & l & o & r \\ j & m & p & s \\ k & n & q & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = B^T A^T = (AB)^T$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\det A = \det A^T$

Biz

$$A = \square \to \square \to \square$$

$$A^T = \square \to \square \to \square$$

$\hookrightarrow$ ugyanaz oszlopokkal

B sz ea

2021.11.10.
1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 7 & 12 \\ 3 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x$$

$\boxed{} = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4$

Állítás: $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$

Ekvivalensek:

(1) $Ax = b$ „mátrixegyenlet" megoldható

(2) $(A|b)$ lin. egyenletrendszer megoldható

(3) $b \in \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ ($a_1, a_2 \dots$ A oszlopai)

Állítás $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ekvivalensek:

(1) $Ax = \underline{0}$ egyértelműen megoldható

(2) $\left(A \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ egyértelműen megoldható

(3) A oszlopai lineárisan függetlenek

(4) $\det A \neq 0$

(5) A sorai lin ftlen

$\det A = \det A^T$

$\det A \neq 0$

$\Updownarrow$

$\det A^T \neq 0$

$\Updownarrow$

A^T oszlopai lineárisan ftlen

$\Updownarrow$

A sorai lin. ftlen.

Def $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

A inverze az $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mx, ha $A \cdot X = E = X \cdot A$

Jele: $X = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix} X \qquad\qquad \begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=A$$

$$\underbrace{\begin{matrix}x_1+2x_2=1\\ 3x_1+5x_2=0\end{matrix}}_{\substack{x_1=-5\\ x_2=3}} \quad\Bigg|\quad \underbrace{\begin{matrix}y_1+2y_2=0\\ 3y_1+5y_2=1\end{matrix}}_{\substack{y_1=2\\ y_2=-1}} \qquad X=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>Tétel</u> $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

① $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A\neq 0$

② Ha $\exists A^{-1}$, akkor az egyértelmű

<u>Biz</u> ① $(\Rightarrow)$ $\exists A^{-1}=X \Rightarrow A\cdot X=E \quad /\det$

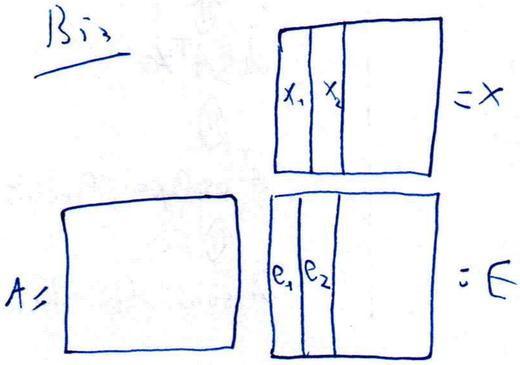
$$\det(AX)=\det E=1$$

$$\det A\cdot\det X=1$$

$$\hookrightarrow \det A\neq 0$$

<u>Lemma</u>: $\det A\neq 0 \Rightarrow \exists$ egyértelmű $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$, amire $AX=E$

<u>Biz</u>



$Ax_1=e_1,\ Ax_2=e_2,\ Ax_3=e_3,\dots,Ax_n=e_n$

$$\underbrace{(A|e_1),\ (A|e_2),\ (A|e_2),\dots,(A|e_n)}_{\text{Egyértelműen megoldható} \Leftarrow \det A\neq 0}$$

$$\underbrace{\exists\, x_1, x_2, x_3,\dots,x_n}_{\text{egyértelmű}}$$

BSZ ea

2021. 11. 10

2

$A \overset{\boxed{L}}{\rightsquigarrow} X \overset{\boxed{L}}{\rightsquigarrow} Y \longrightarrow XY = E$

$\det A \cdot \det X = 1 \Rightarrow \det X \neq 0$

$\underbrace{(AX)}_{E \cdot Y = Y} Y = A \underbrace{(XY)}_{A \cdot E = A} \Rightarrow A = Y \Rightarrow X \cdot A = E$

$(A \mid E) \xrightarrow{\text{Gauss-elim}} (E \mid \underbrace{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}_{A^{-1}})$

Def $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

A sorrangja / oszloprangja r, ha A sorai / oszlopai közül kiválasztható r darab lineárisan független, de $(r+1)$ már nem.

Jele $s(A) = r$, $o(A) = r$

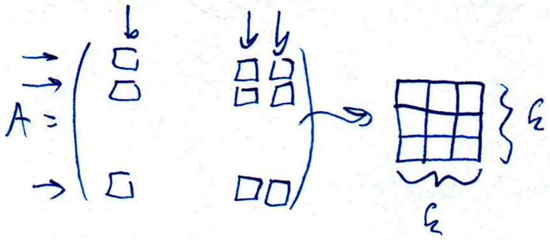
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} o_1 & o_2 & o_3 & o_4 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

$o(A) = 2$

$s(A) = 2$

$d(A) = 2$

Def: Négyzetes részmátrix



Def: A determinánsrangja r, ha A-nak van $r \times r$-es, nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa, de $(r+1) \times (r+1)$-es már nincs

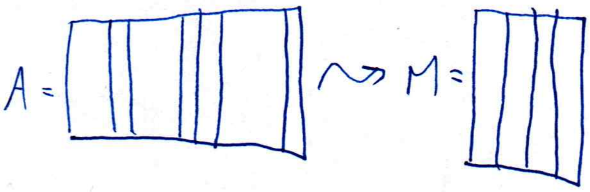
Jele: $d(A) = r$

Tétel: $\underbrace{o(A)=s(A)=d(A)}_{r(A)}$

Tétel (1) elemi sorekvivalens lépések $r(A)$-t nem változtatják meg

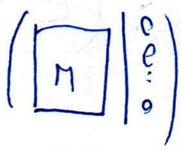
(2) A lépcsős alakú $\Rightarrow$ $r(A)$ = lépcsős alak sorai száma

Biz (1)



M oszlopai lin. ftlen

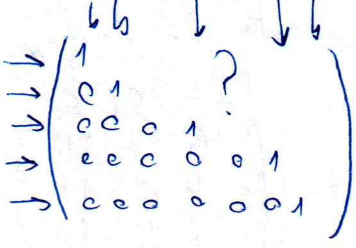
$\Updownarrow$



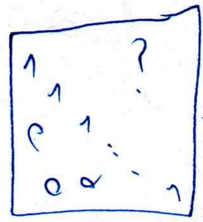
egyértelműen megoldható

Gauss-elim. nem változtatja

(2)



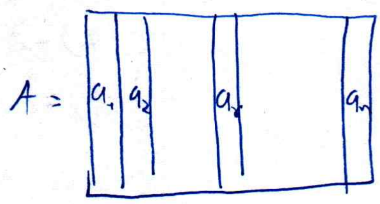
$\rightarrow$ vezér elemet tartalmazó oszlopok



$\rightarrow \det = 1 \Rightarrow d(A) =$ sorok száma

$\quad\quad\quad\quad\;\; \| \;\; r(A)$

Tétel:



$\dim \overbrace{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle}^{W} = r(A) \; (= r)$

Biz: cél: ~~A-ban~~ W-ben van r elemű bázis

$r(A) = r \Rightarrow$ van r lin ftlen oszlop, pl $a_1, \dots, a_r$

$\left.\begin{array}{l} a_1, a_2, \dots, a_r \text{ lin. ftlen} \\ a_1, a_2, \dots, a_r, a_j \text{ lin. öf.} \end{array}\right\} \overset{\text{LÉVL}}{\Longrightarrow} a_j \in \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$

$W = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$

$\left.\begin{array}{l} W\text{-ben } a_1, \dots, a_r \text{ gen.r} \\ a_1, \dots, a_r \text{ lin. ftlen} \end{array}\right\} \Rightarrow$ bázis W-ben

$\dim W = r$

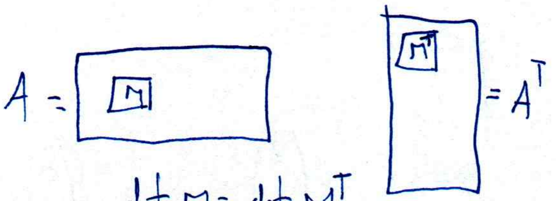
Tétel: $\underbrace{o(A) = d(A)}_{\text{elég}} = s(A)$

Biz

$s(A) = o(A^T) = d(A^T) = d(A)$

① $o(A) \geq d(A)$

② $o(A) \leq d(A)$



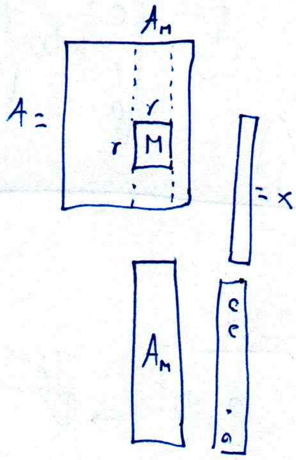
$\det M = \det M^T$

① $d(A) = r \Rightarrow$ cél: A-ban van r db lin. ftlen oszlop

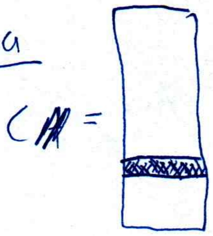
↳ A-ban van $r \times r$-es M részmátrix.

A_M: M-et tartalmazó oszlopok A-ban

Tfh: $A_M \cdot x = \underline{0} \Rightarrow M \cdot x = \underline{0} \xRightarrow{\det M \neq 0} x = \underline{0} \Rightarrow A_M$ oszlopai lin. ftlen.



Lemma



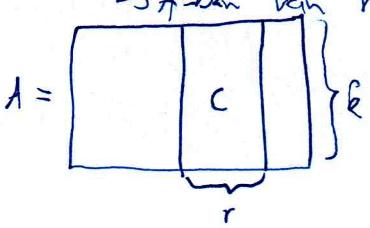
$C \in \mathbb{R}^{k \times r}$, $k > r$

C oszlopai lin. ftlen

$\Rightarrow$ C-ből elhagyható egy sor, úgy, hogy a kapott $C' \in \mathbb{R}^{(k-1) \times r}$ oszlopai lin. ftlenek.

② $o(A) = r$ cél: van A-ban $r \times r$-es M, amire $\det M \neq 0$

↳ A-ban van r db lin. ftlen oszlop



$\mathbb{R}^k$-ban van k elemű generátorrendszer

$\Downarrow$ F-G

$r \leq k$

Ha $k = r \Rightarrow \det C \neq 0 \Rightarrow$ OK

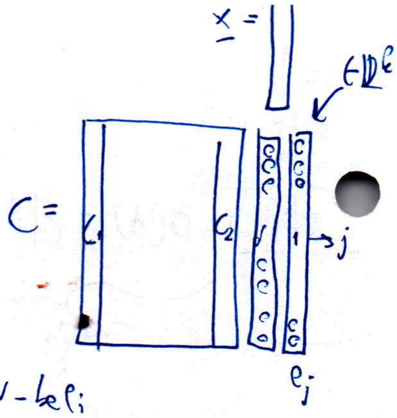
Ha $r < k$ Lemma $C' \rightsquigarrow$ Lemma $C'' \rightsquigarrow$ Lemma $C''' \ldots$

$\ldots \rightsquigarrow C^* \in \mathbb{R}^{r \times r}$, C^* oszlopai lin. ftlen $\Rightarrow \det C^* \neq 0$

Biz (Lemma)

$W := \langle c_1, \dots, c_r \rangle$

W-ben van r elemű gen. rendsz. $\overset{F-6}{\Rightarrow}$ $\mathbb{R}^k$-beli standard bázis $e_1, \dots e_k$ vektorai között van egy, ami nem W-beli



C': C-ből a j-edik sor elhagyása

Tfh: $C'\underline{x} = \underline{0}$

$\underline{x} \neq \underline{0}$

C ~~[illegible]~~ oszlopai lin. ftlen $\Rightarrow C \cdot \underline{x} \neq 0$

$\Rightarrow C\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \delta \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow$

$\cdot \frac{1}{\delta}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ ↯

2.ZH

Def

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ függvény

lineáris leképezés, ha $\exists A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, hogy $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $f(\underline{x}) = A \cdot x$

Ha $k = n$, akkor f lineáris transzformáció

Jele: $[f] = A$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A: \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = f(x)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$3\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2}\right. \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(x)$$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}x_1+1\\x_2+2\end{pmatrix} \rightarrow \text{NEM lin. leképezés}$$

$A \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$f(\underline{0}) = \underline{0}$

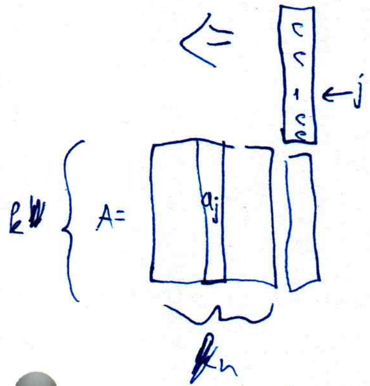
<u>Tétel</u>: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

f lin. lek. $\iff \begin{cases} f(\underline{x}+\underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}) \ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \\ f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad \begin{array}{|l} A(\underline{x}+\underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} \\ A(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda(A\underline{x}) \end{array}$

$\Updownarrow$

<u>Biz</u> $\Rightarrow$ ✓ $[f] = A$

$\Leftarrow$



$$A := \boxed{f(e_1) \,\big|\, f(e_2) \,\big|\, f(e_3) \,\big|\, \dots \,\big|\, f(e_n)}$$

cél: $A\underline{x} = f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Tudjuk: $f(e_j) = A \cdot \underline{e_j}$

<u>def.</u>: $x \in \mathbb{R}^n$ "cuki", ha $f(\underline{x}) = A\underline{x}$

<u>cél</u>: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ cuki

<u>Áll.</u>: $V = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ cuki}\} \leq \mathbb{R}^n$

<u>Biz</u> $\underline{x}, \underline{y} \in V \Rightarrow \underline{x}+\underline{y} \in V$

$f(\underline{x}+\underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = A(\underline{x}+\underline{y})$

$\underline{x} \in V$

$f(\lambda \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x}) = \lambda(A \cdot \underline{x}) = A(\lambda \cdot x)$

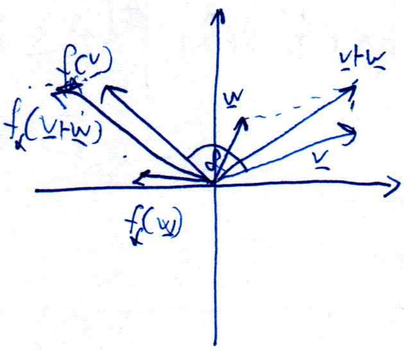
$x \in \mathbb{R}^n$

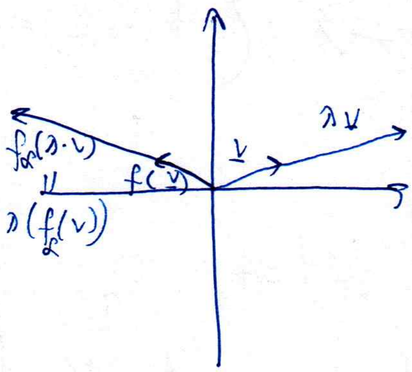
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \Rightarrow \underline{x}$ <u>cuki</u>

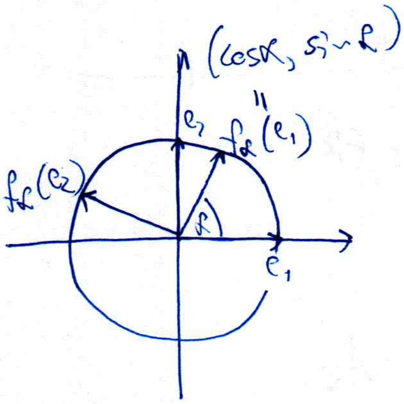
Köv: Ha $f\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ lin. lek. $\Rightarrow [f]$ egyértelmű

és $[f] = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{bmatrix}$ $[f] = A$

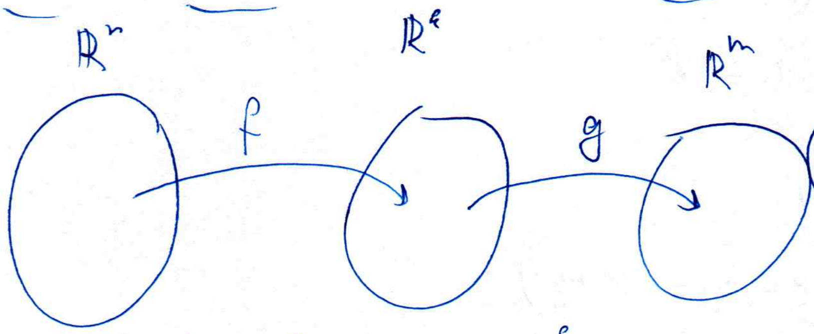
$f_\alpha\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ f_α lin. transzf.







$$\begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = B(Ax) \overset{\boxed{T}}{=} (B \cdot A)(x)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ $[f] = A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$

$g: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ $[g] = B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$

Tétel: $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell \text{ lin. lek} \\ g: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m \text{ lin. lek} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is lin. lek

BSZ ea

2021. 11. 17
3

$f = f_\alpha \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g = f_\beta$

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = [f_\beta]$$

$g \circ f = f_{\alpha+\beta}$

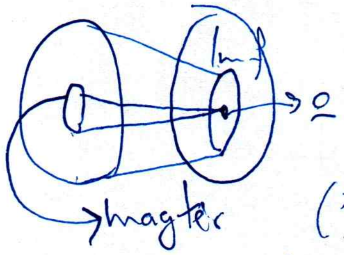
$$[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \\ & \end{pmatrix} =$$

$$= f_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$ addíciós tétel

Bsz ea

2021. 11. 24
1

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ <u>Def</u> f $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin. lek.



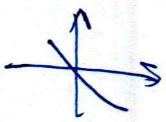
<u>f képtere:</u> $\operatorname{Im} f = \{ y \in \mathbb{R}^k : \exists x \in \mathbb{R}^n, f(\underline{x}) = y \}$

<u>f magtere:</u> $\operatorname{Ker} f = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = \underline{0} \}$

$$[f] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 2z \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 2z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \to$ egyenes, $\underline{0}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 + 2x = 0 \right\}$



<u>Áll.:</u> ① $\operatorname{Ker} f \leq \mathbb{R}^n$

② $\operatorname{Im} f \leq \mathbb{R}^k$

<u>Biz</u> ① $\underline{u}, \underline{v} \in \operatorname{Ker} f \rightsquigarrow f(\underline{u}) = \underline{0}$, $f(\underline{v}) = \underline{0}$

$f(\underline{u} + \underline{v}) \overset{\boxed{T}}{=} f(\underline{u}) + f(\underline{v}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \implies \underline{u} + \underline{v} \in \operatorname{Ker} f$

— · —

$\underline{v} \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda = \mathbb{R}$ $\quad f(\underline{v}) = \underline{0}$

$f(\lambda \cdot \underline{v}) \overset{\boxed{T}}{=} \lambda \cdot f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$

— · —

$\underline{0} \in \operatorname{Ker} f$

— ② —

$$A = [f] = \left(a_1 \middle| a_2 \middle| \cdots \middle| a_n \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = f(x) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$$

$\operatorname{Im} f = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ $\qquad \dim \operatorname{Im} f = \dim \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = r(A)$

Dimenziótétel

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n}$$

$$1 + 1 = 2$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. transzformáció

$[f] = A \qquad x \mapsto y = f(x)$

$y = A \cdot x \quad / \cdot A^{-1}$ (balról)

$A^{-1} \cdot y = A^{-1} A x = E \cdot x = x$

$$\boxed{x}$$
$$\boxed{A}\,\boxed{y} = f(x)$$

Tétel $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. tr.

① f invertálható $\Leftrightarrow \det[f] \neq 0$

② Ha $\det[f] \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ is lin. tr. és $[f^{-1}] = [f]^{-1}$

Biz ① $\Leftarrow$ ✓ ② ✓

① $\Rightarrow$ Ha $\det[f] = \det A = 0 \Rightarrow A$ oszlopai lin. ef. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \neq 0,\ A x = 0$, $A 0 = 0$ $\Big\}$ $f(x) = f(0)$, $x \neq 0$ $\Big\}$ nem invertálható ↯

Bázistranszformáció

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. tr. $\qquad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[d] \\ {[x]_B} \arrow[u] \arrow[r, squiggly, "g"] & {[f(x)]_B} \end{tikzcd} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\shortparallel}{[f]} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ 12x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} f(x)$$

$b_1 = (1, 2)$

$b_2 = (1 \;\; 3)$

$$[x]_B = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to x = u \cdot b_1 + v \cdot b_2 = \begin{pmatrix} u+v \\ 2u+3v \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 8(u+v) - 2(2u+3v) \\ 12(u+v) - 2(2u+3v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u+2v \\ 8u+6v \end{pmatrix}$$

$$\alpha b_1 + \beta b_2 = \begin{pmatrix} 4u+2v \\ 8u+6v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 2\alpha+3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u+2v \\ 8u+6v \end{pmatrix}$$

$\alpha = 4u$

$\beta = 2v$

$$[f(x)]_B = \begin{pmatrix} 4u \\ 2v \end{pmatrix}$$

$[x]_B \to x \qquad [x]_B \xrightarrow{h} x \qquad h$ lin. tr., $[h] = B$

Tétel: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. tr.

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\det B \neq 0$ (oszlopai bázist alkotnak)

Ekkor $g: [x]_B \to [f(x)]_B$ is lin. tr.

és $[g] = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [x]_B$$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} = \underset{\substack{\shortparallel \\ x}}{B[x]_B}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & f(x) \arrow[d, "h^{-1}"] \\ {[x]_B} \arrow[u, "h"] \arrow[r, squiggly, "g"] & {[f(x)]_B} \end{tikzcd}$$

Biz $\quad g = h^{-1} \circ f \circ h$

$[g] = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$

Def ~~Ha~~ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. tr., $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det B \neq 0$

Az f-hez a B bázis szerinti mátrixa a $g: [\underline{x}]_B \to [f(\underline{x})]_B$

lin. tr mátrixa

Jele: $[f]_B$

Tétel $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. tr., $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det B \neq 0$

1. $[f]_B \cdot [\underline{x}]_B = [f(x)]_B \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
2. $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$
3. $[f]_B$ i-edik oszlopa: $[f(b_i)]_B \quad \forall i = 1 \dots n$

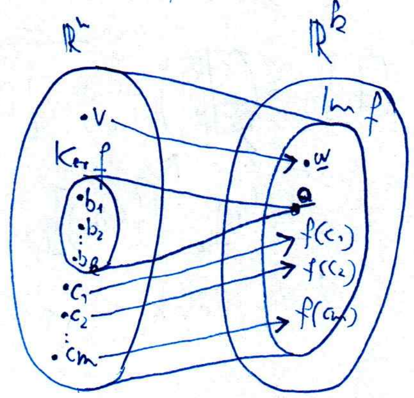
$$[f] = \begin{pmatrix} \; & f(e_i) & \; \end{pmatrix} \qquad g(e_i) = g([b_i]_B) = [f(b_i)]_B$$

↳ i. oszlop

Bsz eq

2021. 12. 01.
1

Dimenziótétel: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lin. lek. $\Rightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{k} + \dim \operatorname{Im} f = n$ (nem k)



Biz $\underbrace{b_1, b_2, \dots, b_k}$ bázis Ker f-ben (**)

lin. ftlen $\Rightarrow$ kiegészíthető a $c_1, c_2, \dots, c_m$ vektorokkal, úgy, hogy $b_1, b_2 \dots b_k, c_1, c_2, \dots, c_m$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben (*), $\dim \mathbb{R}^n = n = k+m \xrightarrow[\text{cél}]{} \dim \operatorname{Im} f = m$?

Áll: $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_m)$ bázis Im f-ben

① gen. rendszer, $w \in \operatorname{Im} f$ tetszőleges vektor $\Rightarrow \exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\underline{v}) = \underline{w}$

(*) $\underline{v} = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_m c_m$

$\underline{w} = f(\underline{v}) = f(\text{———} , \text{———}) =$

$= f(\beta_1 b_1) + f(\beta_2 b_2) + \dots + f(\beta_k b_k) + f(\gamma_1 c_1) + f(\gamma_2 c_2) + \dots + f(\gamma_m c_m) =$

$= \beta_1 \underbrace{f(b_1)}_{=\underline{0}} + \beta_2 \underbrace{f(b_2)}_{=\underline{0}} + \dots + \beta_k \underbrace{f(b_k)}_{=\underline{0}} + \gamma_1 f(c_1) + \gamma_2 f(c_2) + \dots + \gamma_m f(c_m) =$

$= \gamma_1 f(c_1) + \gamma_2 f(c_2) + \dots + \gamma_m f(c_m)$

② $\gamma_1 f(c_1) + \gamma_2 f(c_2) + \dots + \gamma_m f(c_m) = \underline{0}$ cél: $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 0$

$f(\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_m c_m) = \underline{0}$

$\Rightarrow \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_m c_m \in \operatorname{Ker} f$

$b_1, b_2, \dots, b_k$ gen. rendsz. Ker f-ben

$\Rightarrow \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_m c_m = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k$ | $-\underbrace{\beta_1}_{\overset{(*)}{=}0} b_1 - \underbrace{\beta_2}_{\overset{(*)}{=}0} b_2 - \dots - \underbrace{\beta_k}_{\overset{(*)}{=}0} b_k +$

$+ \underbrace{\gamma_1}_{=0} c_1 + \underbrace{\gamma_2}_{=0} c_2 + \dots + \underbrace{\gamma_m}_{=0} c_m = \underline{0}$

$$[f] = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{4x} f(b_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2x} f(b_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B = \left(\boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4u \\ 2v \end{pmatrix} = [f(x)]_B$$

$[f(b_1)]_B$ $[f(b_2)]_B$

diagonális mátrix

b_1, b_2 sajátvektora A-nak

$4, 2$ sajátértéke A-nak

Def: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(1) $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ sajátvektora A-nak, ha $\underline{v} \neq \underline{0}$ és $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(2) $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértéke A-nak, ha $\exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, amire $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

Áll.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. transzf.

B bázis $\mathbb{R}^n$-ben

$[f]_B$ diagonális $\Leftrightarrow$ B elemei $[f]$ sajátvektorai

$f(b_1) = \alpha_1 b_1 + 0 b_2 + \dots + 0 b_n = \alpha \cdot b_1 \; [f(b_1)]_B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{v} \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

I. $x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$

II. $3x_1 + 6x_2 = \lambda x_2$

$\Downarrow$

$(1-\lambda) x_1 + 2x_2 = 0$

$3x_1 + (6-\lambda) x_2 = 0$

pl $\lambda = 2$ sajátértéke?

$\downarrow$

$-x_1 + 2x_2 = 0$

$3x_1 + 4x_2 = 0$

$\Downarrow$

nincs jó v

$\lambda = 2$ NEM sajátérték

$\lambda = 0$

$x_1 + 2x = 0$ ✓

$3x_1 + 6x_2 = 0$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0$ sajátérték

$$\left(\begin{matrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

λ s.é. $\Leftrightarrow$ NEM egyértelműen megoldható $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 7\lambda = 0 \to \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 7$

$\lambda = 7$

$-6x_1 + 2x_2 = 0$

$3x_1 - x_2 = 0 \rightsquigarrow x_2 = 3x_1$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda \in \mathbb{R}$

λ s.é. A-nak $\Leftrightarrow$

$\Updownarrow$

Biz.: $\exists \underline{v} \neq \underline{0}: \ A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} = (\lambda \cdot E)\underline{v}$

$A \cdot \underline{v} - (\lambda \cdot E) \cdot \underline{v} = 0$

$(A - \lambda \cdot E)\underline{v} = 0$

$\left(A - \lambda E \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right) \to \underline{v}$ ennek megoldása

λ s.é. $\Leftrightarrow \overbrace{\left(A - \lambda E \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)}^{\neq \underline{0} \text{ megoldás}}$ Nem egyértelmű m.o. van, $\overset{\boxed{T}}{\Leftrightarrow}$ $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 5 & 6-\lambda & 7 \\ 8 & 9 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda) + \ldots + 3 \cdot 5 \cdot (10-\lambda) =$$

$$= \lambda^3 + \_\,\lambda^2 + \_\,\lambda + \_$$

$A \rightsquigarrow \det A = \underbrace{\pm \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} \ldots c_1\lambda_1 + c_0}_{\text{karakterisztikus polinom}}$

Jele: $K_A(\lambda)$

</Bsz1>