Anal 2 ea

2022.02.14
1

Köv. rendszer 2 db ZH ~~4~~ jegy. 40%, 55%, 63%, 80%
2 db Pót / javító ZH
1 db PótPótZH

Tematika

1. Közönséges differenciálegyenletek
2. Lineáris rekurzió — I. ZH
3. Numerikus, függvénysorok — II. ZH
4. Többváltozós függvények (határérték, deriválás, integrálás)
5. Fourier-analízis (Fourier-sorok, Fourier-transzformációk)

I Közönséges diff. egyenletek

Bev.: eddig főleg algebrai egyenletek fordultak elő

Pl. $x^2-3x+7=0 \to x=\dots$

Ismeretlen egy szám

Most az ismeretlen egy függvény

Diff-egyenletek (kapcsolat egy fgv. és deriváltja között)

Közönséges d.e.
ismeretlen: egyváltozós fgv.
$y(x)=?$ $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Pl: Newton-egyenlet, Radioaktív bomlás, Áramkörök

~~**Parciális d.e.**~~
~~ismeretlen: többváltozós fgv.~~
~~$f(x,y,z)=?$ ...~~

Pl: Maxwell egyenletek, Schrödinger egyenlet ...

D: n-edrendű közönséges diff.-egyenlet

(I)

Implicit alak: $F\left(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x\right) = 0$

rend

független változó

Adott: $F: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$

Keresett $y: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$

függő változó

adott $\tilde{F}: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

(E)

Explicit alak $y^{(n)}(x) = \tilde{F}\left(y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), \dots, y'(x), y(x), x\right)$

D: A φ fgv. az (E) (ill. (I)) }-nek megoldása az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon

ha φ az I-n n-szer diffható és $\forall x \in I$-re $\varphi^{(n)}(x) =$

$= \tilde{F}\left(\varphi^{(n-1)}(x), \dots, \varphi'(x), \varphi(x), x\right)$

D: Cauchy-féle kezdetiérték probléma: Keressük (E)-nek azt a

φ megoldását, melyre

$$\begin{aligned}
\varphi(x_0) &= y_0 \\
\varphi'(x_0) &= y_1 \\
\varphi'(x_0) &= y_2 \\
&\vdots \\
\varphi^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}
\end{aligned}$$

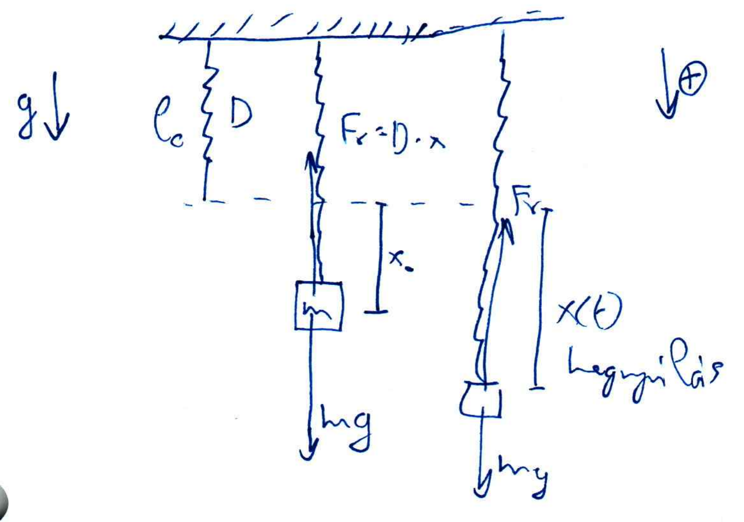
adott $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$-re

Pl! rezgő test

a, Mozgásegyenlet?

b, Ált. megoldás?

c, Kezdeti érték $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$



$mg = D x_0$

$$x_0 = \frac{mg}{D}$$

a, Ált: $F_e = m\cdot\ddot{x}(t)$

$$mg - Dx(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) = g - \frac{D}{m}x(t)}$$ explicit

b, Ált. m.o. $x_{ált}(t) = x_0 + \underbrace{A\cdot\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)}_{C\cdot\sin(\omega t+\varphi)}$

ahol $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$; $A, B \in \mathbb{R}$

b.o. $\ddot{x}_{ált}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t)$

j.o. $g - \frac{D}{m}\left(x_0 + A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right) =$ $\|$ ✓

$$= \cancel{g} - \frac{D}{m}\cdot\frac{\cancel{mg}}{\cancel{D}} - \frac{D}{m}\cdot A\sin(\omega t) - \frac{D}{m}B\cos(\omega t)$$

c, Kezd. felt.

$$x(0) = x_0 + B = 0 \Rightarrow B = -x_0$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(0) = A\omega = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$x_{kezd}(t) = x_0(1-\cos(\omega t))$$

M.: Egy n-edrendű diff. egy. általános megoldása tipikusan n db ~~kötetlen~~ kötetlen állandót tartalmaz. Ezek értékét kell a kezdeti feltételekben illeszteni

D.: partikuláris m.o. - egy konkrét megoldás

Elsőrendű (explicit) d.e.

$$y'(x) = F(y(x), x)$$

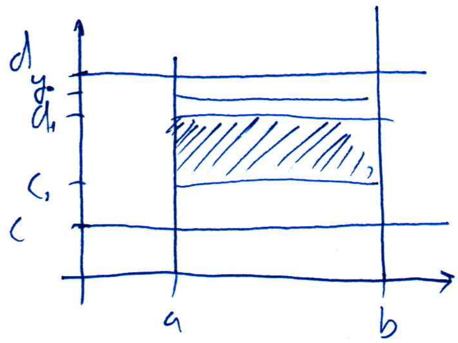
Szeparálható diff. egy.

$$\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))}$$

f, g folytonosak adott $f \in C[a,b], g \in C[c,d]$

Keresett: $y(x)$
ált.

Megoldás menete



Ha $\exists y_0 \in [c,d]$, amelyre $g(y_0) = 0$

akkor $y(x) = y_0$ megoldás

Tfh $[c_1, d_1] \subset [c,d]$ és g-nek nincs gyöke $[c_1, d_1]$-en

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \quad / : g(y(x)) \neq 0$$

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx \quad / \int \ldots dx$$

Anal 2en

[Legyen F az f egy primitív függvénye $F' = f$

Legyen H az $\frac{1}{g}$ ——— " ——— $H' = \frac{1}{g}$]

$H(y_{ált}(x)) + \tilde{C} = F(x) + C \leftarrow$ ált. ~~mo.~~ implicit m.o.

$y_{ált}(x) = H^{-1}(F(x) + C) \leftarrow$ ált. explicit m.o.

1db határozatlan állandó

M. g-nek nincs gyöke $[c_1, d_1]$-en; g folyt. $\Rightarrow$ g nem vált előjelet $[c_1, d_1]$-en $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{g}$ sem vált előjelet $\Rightarrow \exists H = \int \frac{1}{g}\, dx$ szig. monoton $\Rightarrow \exists H^{-1}$

„Pongyola":

$g(y) \neq 0$

~~old~~ $\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x)\, g(y(x)) \quad /: g(y);\ dx$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$ szeparált alak

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$

$H(y) + \bar{c} = F(x) + c$

Pl

$$y'(x) = \frac{sh(2x)}{ch(3y(x))} \qquad y(0)=0 \quad \text{kezd. felt.}$$

$$\searrow \quad y' = \frac{sh(2x)}{ch(3x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = sh(2x) \cdot \frac{1}{ch(3y)} \quad / ch(3y) \cdot dx$$

$$\int ch(3y)\,dy = \int sh(2x)\,dx$$

$$\boxed{\frac{1}{3} sh(3y) = \frac{1}{2} ch(2x) + \tilde{c}}$$

implicit m.o.

D.: n-edrendű lineáris diff. egy.:

Homogén → $a_n(x)\cdot y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x)\,y'(x)+a_0(x)\cdot y(x)=0$

$x\in(\alpha,\beta)$ esetén $a_n(x)\neq 0$

M.: a_n-el osztva elérhetjük, hogy a főegyüttható 1 legyen

Inhomogén $y^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x)\,y^{(k)}(x)=f(x)$

Adottak: $a_k(x)$ – folytonos (α,β)-n, együttható

$f(x)$ – folytonos, inhomogén tag

Keresett: $y(x)=?$

Ha $\forall k$: $a_k\in\mathbb{R}$ (x-től független), akkor állandó együtthatós egyenletről van szó (egyébként függvényegyütthatós)

Elsőrendű lineáris diff. egyenletek:

Inhomogén: $y'(x)+g(x)y(x)=f(x)$ (I)

Homogén $y'(x)+g(x)\,y(x)=0$ (H)

felt.: $f,g \in C(\alpha,\beta)$; (α,β)-n oldjuk meg

Homogén egyenlet általános megoldása

T.: a, (H) megoldásai lineáris teret alkotnak, azaz ha $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ megoldása (H)-nak, akkor $a\cdot\varphi(x)+b\cdot\psi(x)$ is megoldás

b, Egzisztencia: $\forall x_0\in(\alpha,\beta)$ és $\forall y_0\in\mathbb{R}$ esetén $\exists\ \varphi(x_0)=y_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás c, Unicitás: Az előző megoldás egyértelmű

d, (H) megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak, azaz

$$y_{H,ált}(x) = K\varphi(x), \text{ ahol } K\in\mathbb{R},\ \varphi(x)\neq 0 \quad x\in(\alpha,\beta) \text{ esetén}$$

$\boxed{\text{ZH BIZ!!!}}$

Biz.: a,

$$\varphi \text{ m.o.} \Rightarrow \varphi'(x)+g(x)\varphi(x)=0 \quad /\cdot a$$

$$\psi \text{ m.o.} \Rightarrow \psi'(x)+g(x)\psi(x)=0 \quad /\cdot b$$

$\oplus$

$$a\varphi'(x)+b\psi'(x)+ag(x)\varphi(x)+bg(x)\psi(x)=0$$

$$\left(a\varphi(x)+b\psi(x)\right)'+g(x)\left(a\varphi(x)+b\psi(x)\right)=0$$

$\Rightarrow a\varphi(x)+b\psi(x)$ is megoldása (H)-nak

b, c, d, oldjuk meg (H)-t szeparálhatóként

$$\frac{dy}{dx}=-g(x)\cdot y \quad \text{szeparálható} \qquad y(x)\equiv 0 \text{ m.o. (egyensúlyi helyzet)}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int g(x)\,dx \ ; \qquad G'=g$$

$$\ln|y|=-G(x)+C \qquad C\in\mathbb{R},\ e^C\in(0,\infty)$$

$$|y|=e^C\cdot e^{-G(x)}$$

$$y(x)=\pm e^C\cdot e^{-G(x)}$$

$$\boxed{y_{H,ált}(x)=Ke^{-G(x)} \qquad K\in\mathbb{R}}$$

$\varphi(x)=e^{-G(x)}>0$ d ✓

$\varphi(x) = e^{-G(x)} > 0$ d ✓

c, -d,

$$y_0 = K \underbrace{e^{-G(x_0)}}_{>0} \Rightarrow K = y_0 \cdot e^{G(x_0)}$$

---

pl: $y'(x) + \cos x \cdot y(x) = 0$ Hom. egy.

$y' = \frac{dy}{dx} = -\cos x \, y(x)$ $y \equiv 0$ m.o.

$y \neq 0$ $\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$

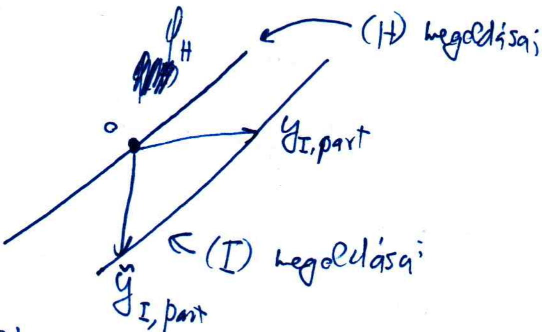
$\ln|y| = -\sin x + C$

$$\boxed{y_{H,ált}(x) = K \cdot e^{-\sin x} \quad K \in \mathbb{R}}$$

Inhomogén egyenlet általános megoldása

T.: a, $y_{I,ált} = y_{H,ált} + y_{I,part}$

b, $y_{I,part}$ megkapható a „konstans" variálásával



c, ~~Unicitás~~ Egzisztencia és unicitás:

$\forall y_0 \in \mathbb{R}$ és $\forall x_0 \in (\alpha, \beta)$ esetén $\exists!$ $y(x)$ megoldása (I)-nek, melyre $y(x_0) = y_0$

Biz.:

a) y_I az (I)-nek megoldása, $y_I'(x)+g(x)y_I(x)=f(x)$

y_H a (H)-nak megoldása, $\oplus\ y_H'(x)+g(x)y_H(x)=0$

$$y_I'(x)+y_H'(x)+g(x)\left(y_I(x)+y_H(x)\right)=f(x)$$

$\Rightarrow$ y_I+y_H megoldja (I)-t

Legyen y_1 megoldása (I)-nek $y_1'+gy_1=f$

y_2 megoldása (I)-nek $\ominus\ y_2'+gy_2=f$

$$(y_1-y_2)'+g(y_1-y_2)=0$$

$\Rightarrow$ y_1-y_2 megoldása (H)-nak ✓

b) Állandó variálásának módszere:

Láttuk: $y_{H,\text{ált}}(x)=k\,\varphi(x)$ — alap m.e. $\varphi(x)\neq 0$

$y_{I,\text{part}}(x)=c(x)\cdot\varphi(x)$ keresett ilyen alak

$y_{I,\text{part}}'(x)=c'(x)\varphi(x)+c(x)\varphi'(x)$

Beírjuk (I)-be $\underbrace{c'(x)\cdot\varphi(x)+\cancel{c(x)\cdot\varphi'(x)}}_{y_{I,\text{part}}'(x)}+g(x)\cdot\cancel{c(x)\cdot\varphi(x)}=f(x)$

$c(x)\underbrace{\left(\varphi'(x)+g(x)\varphi(x)\right)}_{0\text{, mert } \varphi \text{ megoldja (H)-t}}$

$\rightsquigarrow\ c'(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\Rightarrow c(x)=\displaystyle\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx$ ✓

$(\varphi\neq 0)$

Anal ea

2022.02.16

3

$\hookrightarrow\ y_0 = K\,\varphi_H(x_0) + y_{I,part}(x_0)$

$$\Rightarrow \frac{y_0 - y_{I,part}(x_0)}{\varphi_H(x_0)} = K \ \checkmark$$

$\varphi_H(x_0) \neq 0$

Pe

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x e^x$$

$y(1) = 5$; $y(x) = ?$

$x \neq 0$ $\to$ $x \in (0, \infty)$

① (H) $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} : \quad y \equiv 0 \text{ m.e.}$$

$y \neq 0$ $$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$$|y| = e^c |x| \Rightarrow y = \pm e^c \cdot x$$

$$\boxed{y_{H,ált}(x) = K x \qquad K \in \mathbb{R}} \ \checkmark$$

② Variálás $y_{I\_part} = K(x) \cdot x$; Beírjuk (I)-be

$$K'(x)\cancel{x} + \cancel{K(x)} \cdot 1 - \frac{\cancel{K(x) \cdot x}}{\cancel{x}} = \cancel{x} e^x$$

$$K'(x) = e^x$$

$$K(x) = \int e^x dx = e^x + \cancel{c} \quad (c \text{ legyen } 0)$$

$\Rightarrow y_{I,part}(x) = xe^x ; \Rightarrow$ $\boxed{y_{I,ált}(x) = y_{H,ált}(x) + y_{I,part}(x) = Kx + xe^x}$

③ Kezdeti feltétel illesztése

$5 = 1(K + e^1) \Rightarrow K = 5 - e$

$\boxed{y_{kezd}(x) = x(5 - e + e^x)}$ $\quad x > 0$

Pél $y' + 2y\,\mathrm{sh}\,x = \mathrm{sh}\,x$ szeparálható is és lineáris is

a szeparálhatóként

$y' = \frac{dy}{dx} = \mathrm{sh}\,x(1-2y)$; $\quad y = \frac{1}{2}$ m.o.

$y \neq \frac{1}{2}$ $\displaystyle\int \frac{dy}{1-2y} = \int \mathrm{sh}\,x\,dx$

$-\frac{1}{2}\ln|1-2y| = \mathrm{ch}\,x + c$

$\pm(1-2y) = \underbrace{e^{-2c}}_{k>0} e^{-2\mathrm{ch}\,x}$

$1 - 2y = \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{A}} \cdot e^{-2\mathrm{ch}\,x}$

$y_{ált}(x) = \frac{1}{2} - \frac{A}{2}e^{-2\mathrm{ch}\,x}$

② Lineárisan m.o.

Új változó bevezetése

1, $y'(x) = F\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ típus

2, $y'(x) = F(ax+by(x))$ típus

} fel kell tudni ismerni

3, Egyéb adott helyettesítés ← Tasi megadja

Pl $x^2 \cdot y'(x) + x\,y(x) = x^2 + y^2(x)$, $y(1)=2$ $y=?$

$(x\neq 0) \Rightarrow x>0$

$$y'(x) = 1 - \frac{y(x)}{x} + \frac{y^2(x)}{x^2}$$

$$u(x) := \frac{y(x)}{x} \qquad y(x) = u(x)\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = u'(x)x + u(x)$$

új egyenlet $u'(x)x + u(x) = 1 - u(x) + u^2(x)$

$$u'(x) = \frac{1}{x}\left(1 - 2u(x) + u^2(x)\right) = \frac{(u(x)-1)^2}{x} \quad \text{szeparálható}$$

$$\Rightarrow \int \frac{u'(x)}{(u(x)-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \qquad \boxed{u\equiv 1 \text{ megoldás}}$$

(ekkor $y(x)=x$

b.o. $\int u'(x)\cdot(u(x)-1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{u(x)-1} + C_1 \quad (C_1\in\mathbb{R})$

j.o. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \frac{1}{u(x)-1} = -\ln|x| + C \quad (C\in\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \frac{y(x)}{x} = u(x) = \frac{1}{-\ln|x|+C} + 1$$

$$2 = \frac{y(1)}{1} = \frac{1}{-\ln|1|+C} + 1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow y_p(x) = \frac{x}{1-\ln x} + x \quad (0<x<e$$

Pé$_2$ $y'(x) = e^{2y(x)+x} - \frac{1}{2}$ $y(0)=0$

$y=?$

$u(x) := 2y(x)+x \Rightarrow y(x) = \frac{u(x)-x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2}\cdot(u'(x)-1)$

Új egyenlet:

$u'(x) = 2e^{u(x)} > 0 \rightarrow \emptyset$ konstans m.e.

szeparálható

$$\int u'(x)\cdot e^{-u(x)}\,dx = \int 2\,dx$$

b.o. $\int u'(x)\cdot e^{-u(x)}\,dx = -e^{-u(x)} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$

j.o. $\int 2\,dx = 2x + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow -e^{-u(x)} = 2x + C \quad (C \in \mathbb{R})$

$2y(x)+x = u(x) = -\ln(C-2x)$

$y(0)=0 \Rightarrow 0 = \ln(C) \Rightarrow C=1$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}\left(\ln(1-2x)+x\right) \qquad (x<\frac{1}{2}$

Pé$_3$ Oldjuk meg a következő diff. egyenletet az $u:=y^3$ helyettesítéssel

$3x\,y'(x) - 2y(x) = x^3\,y^{-3}(x) \iff 3x\,y'(x)\cdot y^2(x) - 2y^3(x) = x^3$

$u(x) := y^3(x) \Rightarrow u'(x) = 3y^2(x)\,y'(x)$

Új egyenlet $u'(x) - \frac{2}{x}u(x) = x^2$ lineáris diff. e.

Megoldás: H.F.

Anal ea

2022.02.21
2

Iránymező, izoklinák

Tekintsük az $\boxed{y'(x) = F(x, y(x)) \qquad (x\in I)}$

diff. egyenletet ($F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fv, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt. int.)

Elnevezések:

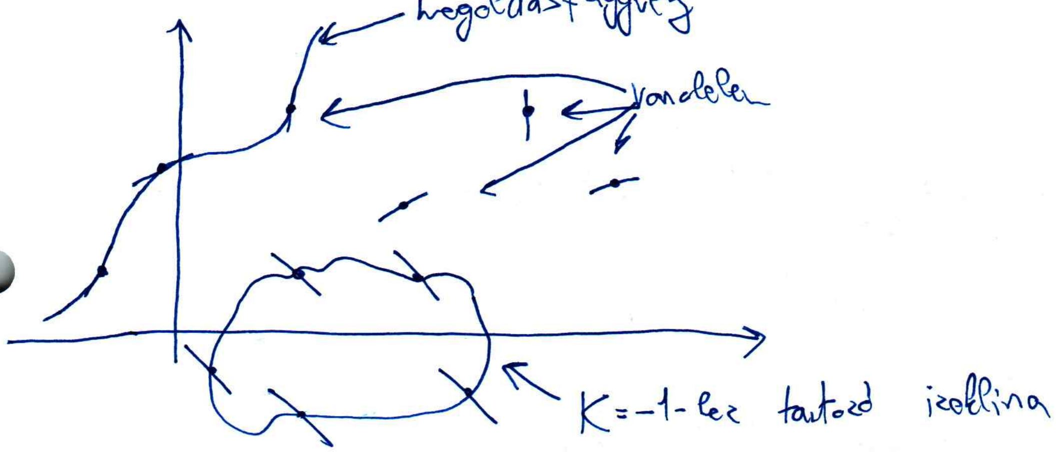
Az $(x_0, y_0) \in Dom(F)$-hez tartozó vonalelem:

(x_0, y_0) középpontú és $F(x_0, y_0)$ ~~hat~~ meredekségű „rövid szakasz”

Iránymező: vonalelemek halmaza

$K \in \mathbb{R}$-hez tartozó IZOKLINA:

$$\{(x_0, y_0) \in Dom(F) : F(x_0, y_0) = K\}$$

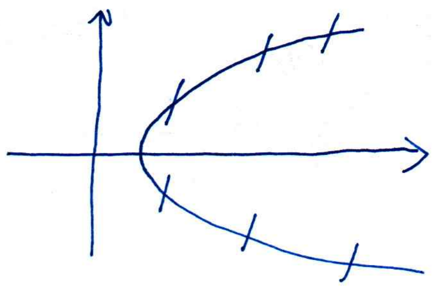


Pl. $y'(x) = x - y^2(x)$

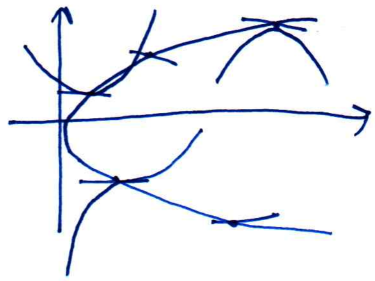
K=0, 1 -hez tartozó izoklínák

K=1 $\quad F(x_0, y_0) = x_0 - y_0^2$

$$x_0 - y^2 = 1 \iff y_0 = \pm\sqrt{x_0 - 1}$$



$\boxed{K=0}$ $\qquad y_0 = \pm\sqrt{x_0}$



ezekben a pontokban lehet szélsőértéke a megoldásfüggvénynek

Van-e szélsőértéke itt a megoldásfüggvénynek

$$y'(x) = x - y^2(x) \Rightarrow y''(x) = 1 - 2y(x)\,y'(x)$$

Ha $y'(x_0)=0 \Rightarrow y''(x_0) = 1 - 2y(x_0)\underbrace{y'(x_0)}_{=0} = 1 > 0$

A $K=0$-hoz tartozó izoklína pontjaiban lokális minimuma van a megoldásfüggvénynek

• Van-e inflexiója az $(1;-2)$ ponton átmenő megoldásfüggvénynek $x_0=1$-ben?

$y''(1) = ?$

$$y''(x) = 1-2y(x)\underbrace{y'(x)}_{x-y^2(x)} = 1-2xy(x)+2y^3(x)$$

$y(1) = -2$

$y''(1) = 1+4-16 < 0$ $\quad \emptyset$ inflexió

Létezés és egyértelműség

$$y'(x) = F(x, y(x)) \qquad (x\in I)$$

Tétel: Legyen $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos fgv, és $(x_0, y_0) \in Dom(F)$. Tegyük fel, hogy $\exists\, I_0, J_0 \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, ~~amelyekre~~ amelyekre $x_0 \in I$, $y_0 \in I_0$ és $I_0 \times J_0 \subseteq Dom(F)$, továbbá, hogy $\exists\, L>0$, hogy $\forall x \in I$: $\forall y_1, y_2 \in J_0$: $\quad |F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$

Ekkor $\exists\, I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, hogy $x_0 \in I$ és és a korállításod teljesülnek rá

- Az F által meghatározott elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek $\exists$ olyan φ megoldása, amelyre:

$$\mathrm{Dom}(\varphi) = I \text{ és } \varphi(x_0) = y_0 \qquad \text{(létezés)}$$

- Ha a φ_1 és φ_2 megoldása az F által meghatározott elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek, továbbá:

$$\mathrm{Dom}(\varphi_1) = \mathrm{Dom}(\varphi_2) = I \text{ és } \varphi_1(x_0) = y_0 = \varphi_2(x_0),$$

akkor $\varphi_1 = \varphi_2$ (egyértelműség)

Biz: $\emptyset$

Megj: ha F csak folytonos, akkor létezik megoldás

Lineáris algebra (kiegészítés)

Def: Azt mondjuk, hogy a $(V, +, \cdot)$ hármas vektortér, ha:

V halmaz, $+ : V \times V \to V$ fgv, $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ ~~fgv~~, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

- $\forall\, u, v, w \in V: \quad (u+v)+w = u+(v+w)$ (asszociativitás)
- $\forall\, u, v \in V: \quad u+v = v+u$ (kommutativitás)
- $\exists\, \mathbb{0} \in V$, hogy $\forall\, v \in V: \quad \mathbb{0} + v = v$
- $\forall\, v \in V: \quad \exists (-v)$, hogy $v + (-v) = \mathbb{0}$
- $\forall\, u, v \in V, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$
$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u$$
$$(\lambda \mu) \cdot u = \lambda(\mu \cdot u)$$
$$1 \cdot u = u$$

~~Nev~~ V elemeit <u>vektoroknak</u> nevezzük

Lineáris algebra (kiegészítés)

Volt: vektortér definíció

Pél: • $\mathbb{R}^n$ minden altere a szokásos összeadással és skalárral való szorzással

• $\mathbb{R}^{n\times n}$ a mátrixösszeadással és skalárral való szorzással

• $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ polinomfüggvények halmaza a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással

• E tetszőleges halmaz, $E\to\mathbb{R}$ függvények a pontonkénti műveletekkel

• Számsorozatok a pontonkénti műveletekkel

---

def.: Legyen V valós vektortér. A $W\subseteq V$ halmaz altér, ha:
- $\forall u,v\in W:\ u+v\in W$
- $\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall u\in W:\ \lambda\cdot u\in W$

Áll.: Legyen V vektortér (valós)

$W\subseteq V$ altér $\Leftrightarrow$ W valós vektortér a V műveleteinek leszűkítéseivel

Biz.: $\emptyset$ (nem kell)

def.: Legyen V vektortér (valós). A V-beli $(v_i)_{i\in I}$ vektorrendszer lineárisan független, ha $\forall k\in\mathbb{N}^+$, $\forall i_1,i_2,\dots,i_k\in I$, $\forall \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$

$$\lambda_1 v_{i_1}+\lambda_2 v_{i_2}+\dots+\lambda_k v_{i_k}=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_k=0$$

def.: Legyen V vektortér és $(v_i)_{i\in I}$ egy V-beli rendszer. Ekkor a

$$\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_{i_j}\ \middle|\ k\in\mathbb{N}^+,\ \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R},\ i_1,i_2,\dots,i_k\in I\right\}$$

halmazt a $(v_i)_{i\in I}$ rendszer által generált altérnek nevezzük.

def: Legyen V vektortér. A $B \subseteq V$ halmazt a V egy bázisának nevezzük, ha lin. ftlen és a $(v)_{v\in B}$ rendszer által generált altér V.

Tétel: Minden (valós) vektortérnek létezik bázisa és bármely két bázisa azonos ~~elemszámú~~ számosságú

Biz. $\emptyset$ (nem triviális)

def: Azt mondjuk, hogy a V (valós) vektortér:
- véges dimenziós, ha bármely bázisa véges
- végtelen dimenziós, ha nem véges dimenziós

def: Legyen V véges dimenziós (valós) vektortér. Ekkor $\dim(V)$-vel jelöljük ~~a~~ tetszőleges bázisának elemszámát, és ezt V dimenziójának nevezzük

Pl
$\dim(\mathbb{R}^n) = n$
$\dim(\mathbb{R}^{n\times n}) = n^2$

$P := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \text{ polinomfüggvény}\}$

P végtelen dimenziós bázisa

$\{id_{\mathbb{R}}^k : k \in \mathbb{N}\}$

id: ~~[illegible]~~ identitásfüggvény

def: Legyen V, W ~~vektorok~~ vektorterek. Azt mondjuk, hogy $f : V \to W$ lineáris, ha:

1, $\forall u, v \in V$: $f(u+v) = f(u) + f(v)$

2, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$: $f(\lambda u) = \lambda \cdot f(u)$

Anal ea | 2022.02.23 2

Tétel: Legyenek V_1, V_2 vektorterek és B_1 bázis V_1-ben, B_2 bázis V_2-ben. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1, B_1 és B_2 azonos számosságú

2, $\exists\, V_1 \to V_2$ lineáris bijekció $\Leftrightarrow$ kölcsönösen egyértelmű

Biz $\emptyset$

Következmény: Ha V vektortér

$$n = \dim(V) \Leftrightarrow \exists\, V \to \mathbb{R}^n \text{ lineáris bijekció}$$

Áll.: Ha V véges dimenziós vektortér és $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bázis V-ben. Ekkor ~~…~~ $\forall v \in V$ esetén egyértelműen léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, hogy

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

$$\boxed{\text{Magasabbrendű lineáris diff. egyenletek}}$$

$$\boxed{\text{Általános (fv. együtthatós) esetek}}$$

Homogén egyenlet: $y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0 \quad (x \in I) \quad (H)$

Inhomogén egyenlet: $y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x) \quad (x \in I) \quad (IH)$

együtthatók ; zavaró fv.

Tétel: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$ folytonos fv-ek, továbbá

$(y_{0,0}, y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in I$

Ekkor egyértelműen létezik olyan $y : I \to \mathbb{R}$ n-szer diffható fv, amelyre (IH) teljesül és

$$y(x_0) = y_{0,0} \,\Big|\, y'(x_0) = y_{0,1} \,\Big|\, \dots \,\Big|\, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}).$$

Homogén egyenlet ~~megoldásai teljesül~~ tulajdonságára

Tétel: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ folytonos és

$$V := \left\{ \varphi : I \to \mathbb{R} \,\Big|\, \varphi \text{ } n\text{-szer diffható és } \varphi^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \varphi^{(\ell)} = 0 \right\}$$

((H) egyenlet megoldásai)

Ekkor V vektortér és $\dim(V) = n$

Biz.: Legyen $\varphi_1, \varphi_2 \in V$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \cdot \varphi_1^{(\ell)} = 0 \\ \varphi_2^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \cdot \varphi_2^{(\ell)} = 0 \end{cases} \oplus \Rightarrow (\varphi_1 + \varphi_2)^{n} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell (\varphi_1 + \varphi_2)^{(\ell)} = 0 \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \in V$$

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in V \Rightarrow \varphi^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \cdot \varphi^{(\ell)} = 0 \quad / \cdot \lambda$

$$(\lambda \cdot \varphi)^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell (\lambda \varphi)^{(\ell)} = 0$$

$\Rightarrow \lambda \cdot \varphi \in V$

$\Rightarrow V$ altér az $I \to \mathbb{R}$ fv-ek vektorterében $\Rightarrow V$ is vektortér

Anal ea 2022.02.23

3

<u>dimenzió</u> $x_0 \in I$ tetszőleges. Ekkor az $u: V \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \mapsto (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0))$ leképezés lineáris bijekció

- injektivitás (előző tétel egyértelműségi része)
- $\mathrm{Ran}(u) = \mathbb{R}^n$ (előző tétel létezés része)

$$\Rightarrow \dim(V) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

■

<u>def</u> A fenti V vektortér egy bázisát a (H) egyenlet egy <u>alaprendszerének</u> nevezzük.

<u>def:</u> Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f_1, f_2, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ $n-1$-szer diffható fv. Ekkor a

$$W: I \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \det\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

függvényt az $(f_j)_{j=1}^n$ rendszer Wronski-determinánsának nevezzük.

<u>Áll:</u> Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}^+$, $f_1, f_2, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ $n-1$-szer diffható fv és jelölje W a $(f_j)_{j=1}^n$ Wronski-det-t

$$W \not\equiv 0 \Rightarrow (f_j)_{j=1}^n \text{ lin. ftlen } I \to \mathbb{R} \text{ f.v-ek vektortérben}$$

<u>Biz:</u> $\emptyset$

<u>Tétel:</u> Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt int. $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ folytonos, továbbá legyenek $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ a (H) egyenlet megoldásai. Ekkor a következők ekvivalensek.

1, $(\varphi_j)_{j=1}^{n}$ alaprendszere (H)-nak

2, $\exists x \in I$ $W(x) \neq 0$

3, $\forall x \in I$ $W(x) = 0$

(ahol W a $(\varphi_j)_{j=1}^{n}$ rendszer Wronski determinánsa)

Biz.: $\emptyset$

Inhomogén egy

Áll.: Legyen ? $\in \mathbb{N}^+$, $I \subseteq \mathbb{R}$? $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$ folytonos fv-ek. Ekkor az (IH) egyenlet bármely két ~~megoldása~~ megoldásának különbsége megoldása (H)-nak

Biz

Tétel: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt és $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ f $I \to \mathbb{R}$ folyt. továbbá

$\varphi_{i,p}$ az

Anal ea

Állandó együtthatós eset

Homogén: $y^{(n)}(x) + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell y^{(\ell)}(x) = 0 \quad (\forall x \in I) \quad (H)$

ahol $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

M.: Legyen $f(x) = e^{\lambda x}$ ~~ahol~~ $(x \in I)$

$f'(x) = \lambda e^{\lambda x} \qquad f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \qquad f^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$

d.e. $\lambda^n e^{\lambda x} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \lambda^\ell e^{\lambda x} = 0 \iff e^{\lambda x}\left(\lambda^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \lambda^\ell\right) = 0 \iff$

$\iff \boxed{\lambda^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \lambda^\ell = 0} \leftarrow$ KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

Tétel: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt int. $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

Legyenek az előbbi karakterisztikus egyenlet

- valós gyökei: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$
- nem valós gyökei: $\lambda_{m+1} = \alpha_{m+1} + i\beta_{m+1} \quad \dots \quad \lambda_{m+2r+1} = \alpha_{m+r} + i\beta_{m+r}$

  $\lambda_{m+2} = \alpha_{m+1} - i\beta_{m+1} \quad \dots \quad \lambda_{m+2r+2} = \alpha_{m+r} - i\beta_{m+r}$

- ℓ-adik gyök multiplicitása legyen: n_ℓ

Ekkor a következő hozzárendeléssel értelmezett $I \to \mathbb{R}$ függvények a (H) egyenlet alaprendszerét alkotják:

- $x \mapsto e^{\lambda x}, \ x \mapsto x e^{\lambda x}, \dots, x^{n_\ell - 1} e^{\lambda x} \quad (\ell = 1 \dots, n)$
- $x \mapsto e^{\alpha_{n+\ell}} \cdot \sin(\beta_{n+\ell}), \ x \mapsto x e^{\alpha_{n+\ell}} \cdot \sin(\beta_{n+\ell}) \dots$

  $\dots, x \mapsto x^{n_\ell - 1} e^{\alpha_{n+\ell}} \sin(\beta_{n+\ell})$
- $x \mapsto e^{\alpha_{n+\ell}} \cdot \cos(\beta_{n+\ell}), \dots, x^{n_\ell - 1} e^{\alpha_{n+\ell}} \cdot \cos(\beta_{n+\ell}) \quad (\ell = 1 \dots, n)$

Pe | ① $y''' - 3y'' - 4y' = 0$ $y = ?$

karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \iff \lambda(\lambda+1)(\lambda-4) = 0$$

gyökök: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 4$

$$e^{0x} \qquad e^{-x} \qquad e^{4x}$$

$$y_{\text{á,á}}(x) = C_1 \cdot \underbrace{e^{0x}}_{=1} + C_2 e^{-x} + C_3 \cdot e^{4x} \qquad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

②

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 = \lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

gyökök: $\lambda_1 = 0$ $\lambda_{23} = 1$

$$y_{\text{á,á}}(x) = C_1 \cdot \underbrace{e^{0x}}_{=1} + C_2 \cdot e^{x} + C_3 \cdot x e^{x} \qquad (x, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

③ $y''' + 4y'' + 13y' = 0$ $y = ?$ ¯\(·v·)/¯

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0$$

gyökök: $\lambda_1 = 0$ $\lambda_{23} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = -2 \pm 3i$

$$y_{\text{á,á}}(x) = C_1 \cdot \underbrace{e^{0x}}_{=1} + C_2 \cdot e^{-2x} \sin(3x) + C_3 \cdot e^{-2x} \cos(3x) \qquad (\ldots)$$

~~④~~

Anal ea

Pl (4) $y^{(5)}-2y^{(4)}+2y'''-4y''+y'-2y=0$

$\lambda^5-2\lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda-2=0$

$(\lambda-2)(\lambda^4+2\lambda+1)=0 \iff (\lambda-2)(\lambda^2+1)^2=0$

gyökök $\quad \lambda_1=2 \quad \lambda_{2,3,4,5}=\pm i$

$y_{h,á}(x)=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot\sin(x)+C_3\cdot\cos(x)+C_4\cdot x\sin(x)+C_5\cdot x\cdot\cos(x) \quad (\dots)$

Tétel (Racionális gyökteszt)

Legyen $r(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2+a_1\cdot x+a_0$

$x\in\mathbb{R}$, $a_n,a_{n-1},\dots,a_0\in\mathbb{Z}$

Ha $r\left(\frac{p}{q}\right)=0$

$(p,q\in\mathbb{Z}$ és $(p,q)=1) \Rightarrow p|a_0,\ q|a_0)$

Inhomogén egyenlet

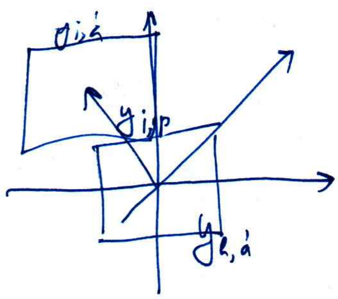
$$y^{(n)}+\sum_{k=0} a_k y^{(k)}(x)=f(x) \quad (x\in I)$$

← zavaró függvény

(ahol $I\subseteq\mathbb{R}$ nyílt int.)

Megoldási módszer: $y_{i,á}=y_{h,á}+y_{i,p}$ ✓

?



$y_{i,p}=?$ Próbafv. módszer

csak speciális alakú zavaró függvényekkel működik

Ha $f(x)=p(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin(\beta x)$ vagy $f(x)=p(x)e^{\alpha x}\cdot\cos(\beta x)$ (ahol p polinom)

akkor a próbafv. (tehát a part. mo.) $y(x)=q(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)+r(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

alakú, ahol q és r ismeretlen polinomok amelyek foka $\leq$ p foka

Spec. esetek

$f(x)$	$y(x)$
$K \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot e^{\alpha x}$
$K \sin(\beta x)$	$A \sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$
$K \cos(\beta x)$	$A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)$
$P_m(x) = \sum_{\ell=0}^{m} b_i x^\ell$	$Q_m(x) =$ (ahol Q ismeretlen m-edfokú polinom)

Ha a zavaró fv. az alábbiak , akkor $y_{i,p}$-t a megfelelő próbafüggvények összegéből kapjuk

Például
$$f(x) = e^{3x} + \sin(6x) + x^2 + 1$$
$$\Rightarrow \text{próba fv.} \quad y(x) = A \cdot e^{3x} + B\sin(6x) + C\cos(6x) + Dx^2 + Ex + F$$

Ezt behelyettesítve a d.e.-be az együtthatók
k lekerül, és a köz. ezt áll fenn

Külső rezonancia

Ha a próba fv. egyik tagja megoldása (H)-nak, akkor az előbbi (~~[illegible]~~) módszer nem vezet eredményre, ezt a tagot (jelöljük f-nek) „lecseréljük" $x \mapsto f(x) \cdot x$-re

Pl 1 $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \sin(2x) \qquad (x \in \mathbb{R})$

– egy (homogén egyenlet): ~~M~~ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

gyökök $\lambda_{1,2} = -1$, kétszeres

Anal ea

2022.02.28
3

$y_{e,\acute{a}} = C_1 e^{-x} + \cancel{\ldots} + C_2 x e^{-x}$ $(\ldots)$

$y_{ip} = ?$ Keressük a kér. alakban

$$y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) \quad / \cdot 1$$
$$y'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) \quad / \cdot 2$$
$$y''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) \quad / \cdot 1 \quad +$$

$$(-3A-4B)\sin(2x) + (4A-3B)\cos(2x) = \sin(2x)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & -3A-4B = 1 \\ (2) & 4A-3B = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = -\frac{4}{25} \\ A = -\frac{3}{25}\end{array}$$

$$\Rightarrow y_{i,p} = -\frac{3}{25}\sin(2x) - \frac{4}{25}\cos(2x)$$

$$y_{i,\acute{a}}(x) = y_{e,\acute{a}} + y_{i,p} = -\frac{3}{25}\sin(2x) - \frac{4}{25}\cos(2x) +$$
$$+ C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x} \quad (\ldots)$$

(2) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = (3x-2)e^{-x}$

$y_{e,\acute{a}} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x}$ $(\ldots)$

$y_{i,p} = ?$ $y(x) = (Ax+B)e^{-x}$ (megoldása homogénnek)

$y(x) = (Ax^2+Bx)e^{-x}$ (ez is — " —)

$y(x) = \boxed{(Ax^3+Bx^2)e^{-x}} \cdot 1$

$y'(x) = (3Ax^2+2Bx)e^{-x} - (Ax^3+Bx^2)e^{-x} = \boxed{(Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx)e^{-x}} \cdot 2$

$y''(x) = \boxed{(Ax^3+(-6A+B)x^2+(6A-4B)x+2B)e^{-x}} \cdot 1$

d.e. $(0\,x^3 + 0\,x^2 + 6A\cdot x + 2B)\,e^{-x} = (3x-2)\,e^{-x}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\ ,\ B = -1$

$y_{i,a}(x) = \left(\frac{x^3}{2} - x^2\right)e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ $(\ldots)$

Pl ③ $y''(x)+2y'(x)+y(x)=\sin(2x)+(3x-2)e^{-x}$

Vegyük észre, hogy ha φ_1 megoldása az
① DE-ből egyenletnek φ_3 megoldása
② — " — $\Rightarrow$

$(\varphi_1+\varphi_2)''(x)+2(\varphi_1+\varphi_2)'(x)+(\varphi_1+\varphi_2)(x)=$

$\underbrace{\varphi_1''(x)+2\varphi_1'(x)+\varphi_1(x)}_{\sin(2x)}+\underbrace{\varphi_2''(x)+2\varphi_2'(x)+\varphi_2(x)}_{(3x-2)e^{-x}}=\sin(2x)+(3x-2)e^{-x}$

$y_{i,a}(x)=-\frac{3}{25}\sin(2x)-\frac{4}{25}\cos(2x)+\left(\frac{x^3}{2}-x^2\right)e^{-x}+$

$+C_1e^{-x}+C_2\cdot xe^{-x}$ $(\ldots)$

Megj.: A próbafv. minden más megközelítésben

$f\leftarrow$ zavaró fv. $\Rightarrow$ határozzuk meg azt a legalacsonyabbrendű

homogén ~~általános~~

LINEÁRIS REKURZIÓ

(LR) $f(n)=a_1f(n-1)+a_2f(n-2)+\ldots+a_\ell f(n-\ell)$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geq\ell)$

<u>def</u> Legyen $\ell\in\mathbb{N}^+$, $a_1,a_2,\ldots,a_\ell\in\mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ függvény (azaz számsorozat) megoldása az $a_1,a_2,\ldots,a_\ell$ együtthatójú, ℓ-edrendű lineáris rekurziónak, ha (LR) teljesül f-re

Pl) Fibonacci

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

$f(0)=0, \quad f(1)=1) \qquad f=?$

Tétel Legyen $\ell \in \mathbb{N}^+$, $a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{R}$, továbbá

$$V := \left\{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; f(n) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j f(n-j) \quad (\ell \in \mathbb{N}^+, n \geq \ell) \right\}$$

Ekkor V vektortér és $\dim(V) = \ell$

Biz $f_1, f_2 \in V$

$$\left.\begin{aligned} f_1(n) &= \sum_{j=1}^{\ell} a_j f_1(n-j) \\ f_2(n) &= \sum_{j=1}^{\ell} a_j f_2(n-j) \end{aligned}\right\} \oplus \Rightarrow (f_1+f_2)(n) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j \cdot (f_1+f_2)(n-j) \Rightarrow (f_1+f_2) \in V$$

$\lambda \in \mathbb{R}, f \in V$

$$f(n) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j f(n-j) \quad / \cdot \lambda$$

$$\lambda f(n) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j (\lambda \cdot f)(n-j) \Rightarrow \lambda f \in V$$

$\Downarrow$

V vektortér

dimenzió: a következő leképezés lineáris bijekció

$$V \to \mathbb{R}^\ell \quad f \mapsto (f(0), f(1), \dots, f(\ell-1))$$

$\square$

def: Az előbbi vektortér egy bázisát a lineáris rekurzió alaprendszerének nevezzük

Pél Fib. $f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad (\dots)$

ötlet: keressük a megoldásokat számtani sorozat alakban!

Legyen $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A \in \mathbb{R}$

$(Aq^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mikor megoldás?

Anal ea

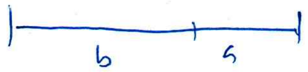
2022.03.02
2

$A\cdot q^n = A\cdot q^{n-1} + A\cdot q^{n-2} \qquad / : q^{n-2} : A$

$q^2 = q+1 \iff q^2-q-1=0$

$q = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = q_{1,2}$

Megj:



$\lambda = \frac{b}{a} = \frac{b+a}{b}$

$\lambda = 1+\frac{1}{\lambda} \iff \lambda^2-\lambda-1=1$

$\Rightarrow (q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ megoldásai a Fib. rekurziónak és lineárisan függetlenek (mert nem egymás skalárszorosai)

tétel

$\Rightarrow$ bázist alkotnak a megoldások terében

$$f(n) = c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

kezdeti feltétel:
$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0 \\ f(1)=1 \Rightarrow c_1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (\ldots) \quad c_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\ c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) \ldots + a_l f(n-l)$$

$$\lambda^l - a_1\lambda^{l-1} - a_2\lambda^{l-2} - \ldots - a_{l-1}\lambda - a_l = 0$$

Tétel Legyen $l\in\mathbb{N}^+$, $a_1,\ldots,a_l\in\mathbb{R}$, továbbá jelölje a fenti egyenlet

- valós gyökeit $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$
- nem valós gyökeit $\lambda_{m+1},\overline{\lambda_{m+1}},\lambda_{m+2},\overline{\lambda_{m+2}},\ldots,\lambda_{m+r},\overline{\lambda_{m+r}}$
- a λ_i gyök multiplicitása pedig k_i

Ekkor az alábbi sorozatok az $a_1, \dots, a_k$ együtthatójú lineáris rekurzió egy alaprendszerét alkotják

- $(\lambda_j^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\cdot\lambda_j^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (n^{k_j-1}\lambda_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$

- $(\lambda_j^n+\overline{\lambda_j}^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n(\lambda_j^n+\overline{\lambda_j}^n))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (n^{k_j-1}\cdot(\lambda_j^n+\overline{\lambda_j}^n))_{n\in\mathbb{N}}$

- $i(\lambda_j^n-\overline{\lambda_j}^n)_{n\in\mathbb{N}}, (in(\lambda_j^n-\overline{\lambda_j}^n))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (in^{k_j-1}(\lambda_j^n-\overline{\lambda_j}^n))_{n\in\mathbb{N}}$

Pl. $f(n) = f(n-1) + 6f(n-2)$ $(\dots)$

$f(0)=1$, $f(1)=2$ $f=?$

karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2-\lambda-6=0$

gyökök: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$

Általános m.o.

$$f(n) = A(-2)^n + B\cdot 3^n \quad (n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(0)=1 \Rightarrow & A+B=1 \\ f(1)=2 \Rightarrow & -2A+3B=2 \end{array}\right\} (\dots) \Rightarrow B=\frac{4}{5}, \quad A=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{1}{5}(-2)^n + \frac{4}{5}\cdot 3^n \quad (n\in\mathbb{N}),\ n\geq 2$$

NUMERIKUS SOROK

$(1-1)+(1-1)+\dots \overset{(?)}{=} 0$ (?)

$1+(-1+1)+(-1+1)\dots \overset{(?)}{=} 1$

def: Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat:

- Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozathoz tartozó (numerikus) sornak nevezzük a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$ sorozatot és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ szimbólummal jelöljük

- $\forall n\in\mathbb{N}$-re $\sum_{k=0}^{n} a_k$ a $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_n$ sor n-edik részletösszegének nevezzük

- Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sornak létezik határértéke, akkor ezt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$-nel jelöljük és a sor összegének nevezzük

---

Megj: Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat

1.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$
a_0	a_0
a_1	a_0+a_1
a_2	$a_0+a_1+a_2$
$\vdots$	$\vdots$

2. Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sornak létezik határértéke, akkor

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$$

3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens $\iff$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ létezik és véges

(4) $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \qquad (n > N)$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ Ha az egyik oldal $\exists$ és véges $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ másik oldal is

Pl] $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens-e?

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

Pl] $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & n \text{ ps} \\ 0 & n \text{ ptl} \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{divergens}}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

a_0 a_0

a_1 a_0+a_1

a_2 $a_0+a_1+a_2$

$\vdots$ $\vdots$

a_∞

határérték (ha létezik)

$\lim_{n\to\infty} a_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Áll Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat

Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Biz TFH $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv. és $S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{\downarrow n\to\infty \atop S} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{\downarrow n\to\infty \atop S} \quad (n\in\mathbb{N}^+) \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} S-S=0$$

Megj.: A feltétel már nem elégséges, pl.

$\frac{1}{n}\to 0$ és $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ divergens

---

Tt

Tétel (Geometriai sor összege)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{ha } |q|<1 \\ +\infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Biz

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n-1}-1}{q-1} \qquad q \neq 1$$

számtani sorok első n tagja

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1 \quad \text{ha } q=1$$
$$\searrow +\infty$$

$$|q|<1 \Rightarrow q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n-1}-1}{q-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q}$$

$$\underline{q>1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n-1}-1}{q-1} \longrightarrow +\infty$$

$$\underline{q \leq -1} \qquad \left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) \longrightarrow \nexists$$

$\square$

Áll (műveleti tulajdonságok) Legyenek $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_n$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} b_n$ numerikus sorok és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a következők teljesülnek:

(1) Ha $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ és $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n)$ konvergens

és $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

(2) Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv., akkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n$ konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Biz (1) TFH $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ és $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens

$$\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n}$$

(2) TFH $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lim_{n\to\infty} \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k =$$

$$= \lambda \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \square$$

Pél
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}+5^n}{3^{2n}} = 3^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^{2n}} =$$

$$= 3^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 3^n \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{63}{4}$$

Tétel (Cauchy-kritérium sorokra)

A $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_n$ akkor konvergens, ha

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,m \in\mathbb{N}) : \left((n>m>N) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \right)$$

Biz $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$-re alkalmazzuk a sorozatokra vonatkozó Cauchy-kritériumot

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \quad \square$$

Pél $\emptyset$.

Tétel (majoráns kritérium) Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~és~~ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozatok, amelyekre

- $\exists N\in\mathbb{N}$, hogy $\forall n\in\mathbb{N}$ és $n\geq N$ esetén $0\leq a_n\leq b_n$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens

Akkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ is konvergens

Biz $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists N_1\in\mathbb{N}$, hogy $\forall n,m\in\mathbb{N}$ $n>m>N_1$ esetén

$\left|\sum_{k=n-1}^{m} b_k\right| < \varepsilon$ Legyen $N_0 = \max\{N, N_1\}$ $n>m\geq N_0$

$$\left|\sum_{k=n-1}^{m} a_k\right| = \sum_{k=n-1}^{m} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k = \left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ kon}$$

$\square$

Tétel (minoráns krit.) Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozatok, amelyekre:

- $\exists N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$ esetén:

  $0\leq b_n\leq a_n$

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens

Ekkor $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens és mindkét sor összege végtelen.

Biz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$. Legyen $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ $(n\in\mathbb{N}^+)$

Ekkor $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_n \leq \sum_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} b_k = S_{n+1}$

$\Rightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy küszöbindextől kezdve monoton növő is divergens $\Rightarrow S_n \to +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{N} a_k + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n} b_k}_{\to +\infty\ (*)}}_{\to +\infty} \underset{n\geq N}{<} \sum_{k=0}^{n} a_k \longrightarrow +\infty$$

[(*) $\sum_{k=N+1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{N} b_k \longrightarrow \infty$]

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n = +\infty$, divergens pe

1. $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2} \text{ konvergens;}}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^+) \\ \text{és } \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n(n-1)} \text{ konvergens} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2} \text{ konvergens}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2} \text{ konvergens}$$

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+3}{n^3-4}$ konvergens-e?

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \frac{n+3}{n^3-4} \underset{n\geq 2}{\leq} \frac{4n}{\frac{1}{2}n^3} = \frac{8n}{n^3} = \frac{8}{n^2} = 8\cdot\frac{1}{n^2} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{8}{n^2} \text{ konvergens, mert } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \text{ is} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{majoráns krit.} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+3}{n^3-4} \text{ is konv.} \end{array}$$

3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n+1}{n^2-5}$ konvergens-e?

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2n+1}{n^2-5} \underset{n\geq 3}{\geq} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \text{ divergens} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{minoráns krit.} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n+1}{n^2-5} \text{ divergens} \end{array}$$

Anal ea

2022. 03. 07
4

④ Konvergens-e? $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ sor!

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \text{divergens}$$

Tétel (gyökkritérium) Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív tagú számsorozat. Ekkor a következő állítások teljesülnek:

(1) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens

(2) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens

Biz

(1) Legyen $1 > q > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}$, hogy $\forall n\in\mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $\sqrt[n]{a_n} < q \Leftrightarrow a_n < q^n$

és $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ konvergens $\xrightarrow[\text{krit}]{\text{major}} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv.

(2) $1 < A := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \exists$ olyan részsorozata

$(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$-nek, ami A-hoz tart

$\Rightarrow$ végtelen sok $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \Leftrightarrow a_n > 1$$

$$\Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \xrightarrow[\text{felt.}]{\text{szüks}} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \text{ divergens}$$

$\square$

Következmény Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan nemnegatív tagú számsorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\ \exists \Rightarrow$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens

Anal cal

2022.03.09.
1

Megj.: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetben nem tudunk semit sem mondani a sor konvergenciájáról

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2} \text{ konvergens}$$

Pl $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \underbrace{\frac{n^3}{2^n}}_{a_n}$ konvergens-e

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{konvergens}$$

Tétel (hányadoskritérium): Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú sorozat. Ekkor:

(1) $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens

(2) $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens

Biz (1) Legyen ~~q~~ $1 > q > \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}$, hogy $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

Spec $\quad \frac{a_{N+1}}{a_N} < q \Leftrightarrow a_{N+1} < q a_N$

$$\Rightarrow a_{N+2} < q a_{N+1} < q^2 a_N$$

teljes indukció

$\Rightarrow \forall n \geq N$ esetén $\quad a_n < q^{n-N} \cdot a_N = \cancel{\ldots}$

$$= q^n \cdot \frac{a_N}{q^N}$$

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q^n \cdot \frac{a_N}{q^N}$ konvergens $\xRightarrow[\text{krit.}]{\text{majoráns}}$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens

(2) $\quad \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Spec. $\quad \frac{a_{N+1}}{a_{N+1}} > 1 \Leftrightarrow a_{N+1} > a_N$

$\Rightarrow$ teljes indukció

$$a_n > a_N \quad (n \geq N) \quad \Rightarrow a_n \underset{(n\to\infty)}{\not\to} 0$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens $\qquad \square$

Következmény: Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú sorozat, és tfh $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(1) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv.

(2) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ <div> ... </div>

Pl $\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{=a_n}$ konv?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(n)!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \xRightarrow[\text{krit}]{\text{hányados}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n}{n!} \text{ konvergens}$$

Lemma Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú sorozat $\Rightarrow$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Biz ∅

Megj: lemma alapján a gyökkritérium erősebb a hányados kritériumnál

Pl $\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{=a_n}$ konvergens-e?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{\cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

$$\xRightarrow[\text{krit}]{\text{hányados}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{n^n} \text{ konv}$$

Végül észre $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} \xRightarrow{\text{Lemma}} \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ és $= \frac{1}{e} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e}$$

Integrálkritérium

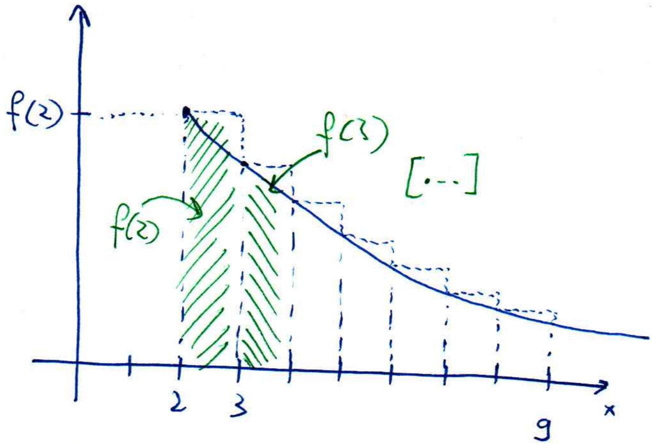
Tétel: Legyen $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ monoton csökkenő

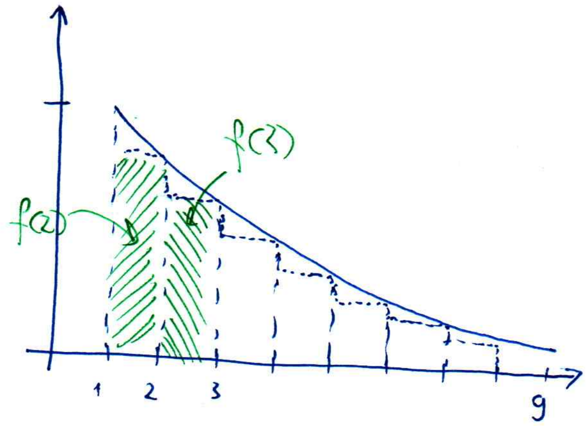
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$

Biz:

f monoton csökkenő, $\int$ monoton

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_2^{+\infty} f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{alsó}}}{[x]})\,dx = \int_1^{+\infty} f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{felső}}}{[x]}) \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$





$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$

Az egyenlőtlenség láncból következik az ekvivalencia

Anal ea

2022.03.09.
3

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad \text{Hiperharmonikus sorok}$$

$\alpha=1 \Rightarrow$ harmonikus sor

Áll (hiperharmonikus sorok konvergenciája)

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konv} \iff \alpha>1$$

Biz

$\alpha\le 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{1}{n^\alpha}$ <div>... </div>

$\alpha=1$ (volt)

$\alpha\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\} \qquad f(x)=\frac{1}{n^\alpha} \quad (n\ge 1)$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=1}^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty & 0<\alpha<1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha>1 \end{cases}$$

integrál krit. $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^\alpha}$ divergens, ha $0<\alpha<1$

$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha>1$ $\square$

Megj: integrálkritériumban

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ helyett $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ is írható $(a>1)$

Pe| $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\ln(n)}$ konv-e!

$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ $(x \geq 2)$ f nemnegatív monoton csökkenő

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln|\ln(x)|\Big]_{x=2}^{b} =$$

$\hookrightarrow \frac{g'}{g}$

$$= \lim_{b\to+\infty} \Big(\ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2)) \Big) = +\infty$$

$\underset{\text{krit}}{\overset{\text{int}}{\Longrightarrow}}$ divergencia: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\ln(n)}$ divergens

Hibabecslés

Általában: $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv, legyen S az összeg, ~~...~~, $N\in\mathbb{N}$

Ha S-et az N-edik részletösszeggel közelítjük, az mekkora hibát jelent?

$$\left| S - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| \leq ?$$

Pe| ① $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2}$ konvergens-e? Ha igen, akkor legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha ~~...~~ a sorösszeget a 100 részletösszeggel közelítjük

Anal ea

$$\frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2} \overset{n\geq 1}{\leq} \frac{2\cdot 3^n}{4^n} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^+} 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ konv}$$

$$\overset{\text{major.}}{\underset{\text{krit.}}{\Longrightarrow}} \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2} \text{ konv}$$

Hibabecslés Legyen a sorösszeg S

$$\left|S-\sum_{n=0}^{100}\frac{3^n+3}{4^n+n^2}\right| = \sum_{n=101}^{\infty}\frac{3^n+3}{4^n+n^2} \leq \sum_{n=101}^{\infty}2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{101}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{101}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \ldots$$

2) $\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq 2}} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ konv -e? Hiba: $N=10^5$

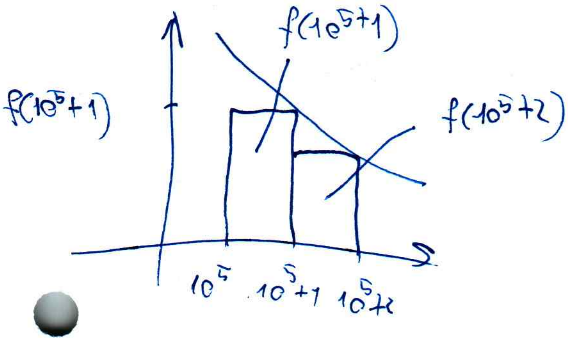
$$f(x) = \frac{1}{n\ln^2(n)} \quad (n:=x)\ (x\geq 2) \quad \text{f nemneg, mon}$$

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_{x=2}^{b} = \frac{1}{\ln(2)} \to \underline{\text{konvergens}}$$

Anal ea — 2022.03.16 — 1

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^+ \\ n\geq 2}} \frac{1}{n\ln^2(n)} \leftarrow$$ múltkor láttuk, hogy konvergens (int. krit.)

<u>Hibabecslés</u> 100 000 részletösszeggel való közelítés hibája?



$$f(x) = \frac{1}{x\cdot \ln^2(x)} \quad x\geq 2$$

$$\left| S - \sum_{n=2}^{10^5} \frac{1}{n\ln^2(n)} \right| = \sum_{n=10^5+1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)} \leq \int_{10^5}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_{10^5}^{b} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_{x=10^5}^{b} = \frac{1}{\ln(10^5)} \approx 0{,}087$$

Abszolút és feltételes konvergencia

<u>def</u> Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor <u>abszolút konvergens</u>, ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ konvergens

feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens

<u>Áll</u> Minden abszolút konvergens numerikus sor konvergens

<u>Biz</u> Tfh. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ abszolút konvergens: $\varepsilon > 0 \overset{\text{Cauchy krit.}}{\Longrightarrow} \exists N\in\mathbb{N}$, hogy $\forall n,m\in\mathbb{N}$ és $n>m>N$ esetén $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \overset{\text{egyenlőtlenség}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \overset{\text{Cauchy krit.}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ konv.}$$ □

Pél konvergens-e? $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2}$?

$$\left|(-1)^n \frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2}\right| = \frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2}$$

Volt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2}$ konvergens

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2}$ abszolút konvergens

$\Downarrow$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{3^n+3}{2^{2n}+n^2}$ konvergens

---

def Legyen $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor és $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció. Ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\pi(n)}$ sort a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ egy átrendezésének nevezzük

---

Tétel (Riemann-féle átrendezési tétel) Minden abszolút konvergens sor bármely átrendezése konvergens, és az összeg megegyezik az eredeti sor összegével

Biz $\emptyset$

Megj: a tétel megfordítása is igaz:

Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ feltételesen konvergens és

$s, s' \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $s \leq s'$ $\Rightarrow \exists\, \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\pi(k)} = s, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\pi(k)} = s'$$

Anal ea

2022.03.16
2

Alternáló sorok és Leibniz-krit

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ divergens, $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n}$ konv?

<u>def</u> Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor Leibniz-sor, ha:

(1) $a_n \cdot a_{n+1} \le 0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ (azaz <u>alternál</u>)

(2) $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökken

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ha (1) és (2) csak egy küszöbindextől ~~teljesül~~ kezdve teljesül, akkor

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$-et <u>tágabb értelemben vett Leibniz-sornak</u> nevezzük

<u>Tétel</u> (Leibniz-kritérium) Minden tágabb értelemben vett Leibniz-sor konvergens, ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ Leibniz-sor és S jelöli az összegét

$$\left| S - \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| \le |a_{n+1}|$$

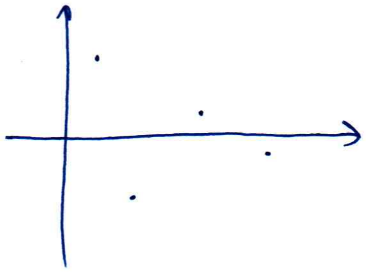
<u>Biz</u> (1) Először belátjuk, hogy $\forall$ Leibniz-sor konvergens.

Legyen $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ Leibniz-sor, és legyen $b_n = |a_n|$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

Feltehető: $a_n = (-1)^n b_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

[a másik eset, $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, visszavezethető erre]

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n\in\mathbb{N})$$



$$s_{2n+3}-s_{2n+1}=a_{2n+3}+a_{2n+2}=-b_{2n+3}+b_{2n+2}\geq 0$$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökk

$$s_{2n+2}-s_{2n}=a_{2n+2}+a_{2n+1}=b_{2n+2}-b_{2n+1}\leq 0$$

$\Rightarrow (s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő

$(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő

$$s_{2n+1}=s_{2n}-b_{2n+1}\leq s_{2n}\leq s_2 \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$$

$$s_{2n}=s_{2n+1}+b_{2n+1}\geq s_{2n+1}\geq s_1$$

$\Rightarrow (s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő és felülről korlátos $\Rightarrow$ konvergens

$(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő és alulról korlátos $\Rightarrow$ konvergens

$$s:=\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}\,,\quad s':=\lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{s}}=\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(s_{2n}+a_{2n+1})=\lim_{n\to\infty} s_{2n}+\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=\underline{\underline{s'}}$$

$\Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (az $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor) konvergens

<u>Hibabecslés</u> $\quad s_{2n+1}\leq s\leq s_{2n+2}\leq s_{2n} \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$

$$|s-s_{2n+1}|=s-s_{2n+1}\leq s_{2n+2}-s_{2n+1}=a_{2n+2}=|a_{2n+2}|$$

$$|s-s_{2n}|=s_{2n}-s\leq s_{2n}-s_{2n+1}=-a_{2n+1}=|a_{2n+1}| \checkmark$$

Anal ea

2022. 03. 16
3

(!!) Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ tágabb értelemben vett Leibniz-sor

$\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}$, hogy $\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq N}} a_n$ Leibniz-sor $\Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq N}} a_n$ konv $\Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv. $\square$

Pe

① $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$ Leibniz-sor

- alternál ✓
- $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ✓
- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökken

$\Bigg\}$ Leibniz-krit. $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$ konv.

② $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$ konvergens-e?

$1 \leq \sqrt[n]{2n+1} \underset{n\geq 1}{\leq} \sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}$ $\Rightarrow$ rendőrelv $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1} = 1$

($\sqrt[n]{3} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$)

~~$\Rightarrow$ divergens~~

$\Rightarrow (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} \not\longrightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$ divergens

③ (AH) $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \underbrace{\frac{n^2+3n+2}{n^4+6n^3+2n+2}}_{=a_n}$ konvergens-e?

$$\left|(-1)^n a_n\right| = \frac{n^2+3n+2}{n^4+6n^3+2n+2} \le \frac{6n^2}{n^4} = \frac{6}{n^2}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{6}{n^2} \text{ konvergens} \xrightarrow[\text{krit}]{\text{majoráns}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n \text{ abs. konv.} \Rightarrow \text{konv}$$

④ $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \underbrace{\frac{2n+1}{n^2+3n+1}}_{a_n}$ Leibniz-krit?

- alternál ✓
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2+3n+1} \overset{\text{HF}}{=} 0$ ✓
- monoton csökkenés

$$a_{n+1} \overset{?}{\le} a_n \Leftrightarrow \frac{2n+3}{(n+1)^2+3(n+1)+1} \overset{?}{\le} \frac{2n+1}{n^2+3n+1}$$

$$\Leftrightarrow [\ldots] \checkmark$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n \text{ Leibniz-sor} \xrightarrow[\text{krit.}]{\text{Leibniz}} \text{konvergens.}$$

Hibabecslés 100 részletösszegre $\qquad S :=$ sorösszeg

$$\left|S - \sum_{n=0}^{100} (-1)^n a_n\right| \le a_{101} = \frac{201}{10\,301}$$

⇑ I. ZH. csak definíció és tételfejezd. ⇑

III Függvénysorok

Cél: $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ típusú fv-ekről nem triviális tulajdonságok kimondása / belátása

---

Függvénysorozatok és függvénysorok általános tulajdonságai

Sorozat: olyan fv. amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{N}^+$

Számsorozat: olyan sorozat, amelynek minden tagja valós szám

Függvénysorozat: olyan sorozat, amelynek minden tagja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv.

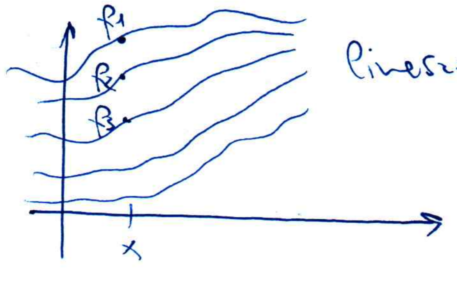
def Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fv. sorozat. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pontonkénti) limeszfüggvényének nevezzük és $\lim_{n\to\infty} f_n$-nel jelöljük azt a fv-t, amelyre:

$$\mathrm{Dom}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(f_n) \;\middle|\; (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \right\}$$

$\bigcap$ kupak

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ KONVERGENCIAHALMAZA



limeszfv.

Kérdések: Ha egy fvsorozat tagjai rendelkeznek bizonyos analitikus tulajdonságokkal, akkor ez „öröklődik-e” a limeszfv-re? (folytonosság, integrálhatóság, deriválhatóság)

?

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

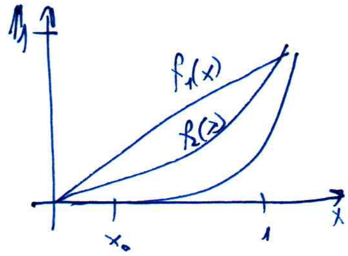
$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Általában a válasz: NEM

Pl $f_n(x) = x^n$ $\quad (x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}^+)$ limeszfv?

Ha $0 \le x \le 1$ $\quad x^n \to 0$

Ha $x = 1$ $\quad 1^n \to 1$

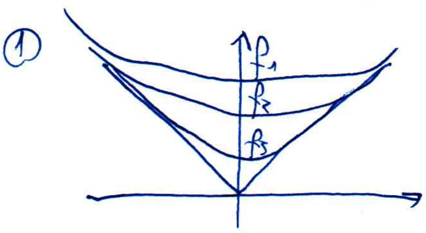


$\Rightarrow$ A limeszfv (legyen f)

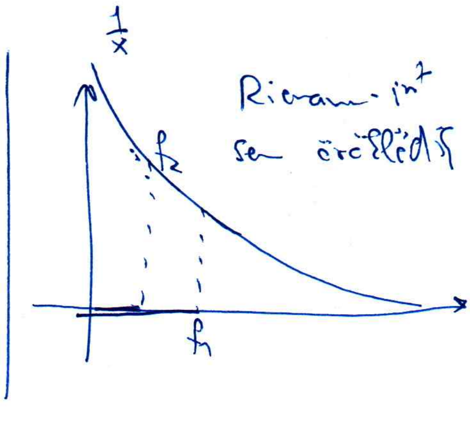
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

NEM folytonos (f_n folyt. $\forall n\in\mathbb{N}^+$-ra)

Pl (nagyon vázlatosan)

① 

abs fv. „megközelítő” diff-ható fvekkel

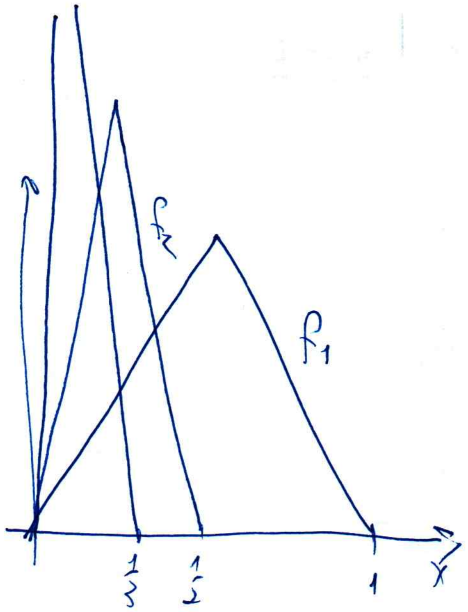


Riemann-int sem öröklődik

Anal ea

2022.03.21
2

③



$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 f_2(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 f_3(x)\,dx = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{?}{\equiv} 0$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Jel: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. $H \subseteq Dom(f)$

$$||f||_H := \sup_{x\in H} |f(x)|$$

f szup-normája a H halmazon

def Legyen $(f_n)_{n\in N}$ fv sorozat, jelölje f a pontonkénti ~~[illegible]~~ limeszfv-ét, illetve legyen $H \subseteq \bigcap_{n\in N} Dom(f_n)$

Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ fvsorozat

- pontonként konvergens a H halmazon, ha $\forall x \in H$ esetén $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens (azaz $H \subseteq Dom(f)$)
- egyenletesen konvergens a H halmazon, ha pontonként konvergens H-n és $||f_n - f||_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Megj: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fvsorozat, $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $H\subseteq\mathbb{R}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként konvergens H-n $\iff$

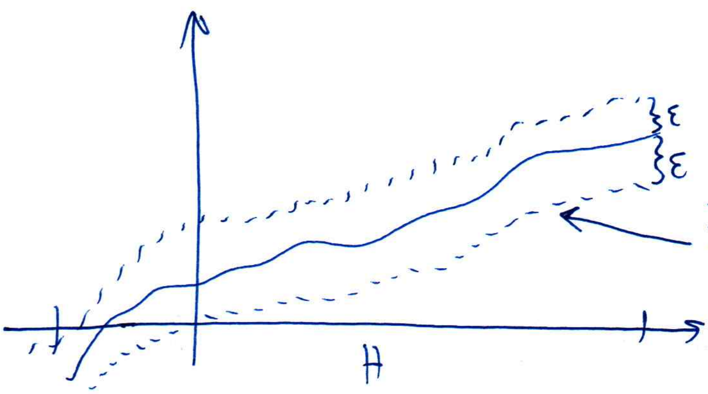
$$(\forall x\in H)\underbrace{(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\big((n\geq N)\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon\big)}_{\iff f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens H-n $\iff \|f_n-f\|_H\to 0 \iff$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}):\Big((n\geq N)\Rightarrow \sup_{x\in H}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon\Big)$$

$$\sup_{x\in H}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \iff \forall x\in H\ |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in H):\big((n\geq N)\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon\big)$$



limeszfv.

$\exists N\in\mathbb{N}$, hogy $n\geq N$ esetén f_n grafikonja ebben a sávban van.

<u>Tétel</u> (limeszfv. folytonossága) Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fv. sorozat, ~~∀~~

$f:=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $x_0\in Dom(f)$ ttf.:

- $\forall n\in\mathbb{N}$-re f_n folyt. x_0-ban
- $\exists$ olyan V környezete x_0-nak, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fv. sorozat egyenletesen konv. a $V\cap Dom(f)$ halmazon

Anal ea

2022.03.21
3

Ekkor f folytonos x_0-ban

Biz $\exists\ \delta_1 > 0$, hogy $]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[\subseteq V$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}$, hogy $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall x \in\ ]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[\cap D_{f}$

f_N folytonos x_0-ban $\Rightarrow \exists\ \delta_2 > 0$, hogy $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall x \in\ ]x_0-\delta_2, x_0+\delta_2[\cap D_{f_N}$

$\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ $\quad x \in\ ]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap D_f$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \overset{\Delta}{\leq}$$

$$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Pl $f_n(x) = x^n \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$

Volt: limeszfv.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Egyenletesen konv?

$H = [0, 1[$

$$\|f_n - f\|_H = \sup_{x \in [0,1[} |x^n - 0| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

<u>Tétel</u> (limeszfv. deriválhatósága) Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fv-sorozat, és tfh. $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén f_n diffható az I nyílt intervallumon. Továbbá tfh. $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens I-n, valamint $\exists x_0\in I$, hogy $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens $\Rightarrow$

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens I-n

(2) a limeszfv. diffható az I intervallumon és

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (\forall x\in I)$$

<u>Biz:</u> $\emptyset$

<u>Tétel</u> (limeszfv. integrálhatósága) Legyen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$ tfh. az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden tagja Riemann-int.ható az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens $[\alpha,\beta]$-n. Ekkor a limeszfv. is Riemann-int.ható $[\alpha,\beta]$-n és

$$\int_\alpha^\beta \lim_{n\to\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx$$

<u>Biz:</u> $\emptyset$

<u>def</u> Legyen ~~fv.sorozat~~ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fv. sorozat. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$-hez tartozó <u>függvénysornak</u> nevezzük és $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$-el jelöljük a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$ <u>függvénysorozatot</u>.

Def A $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysor összegfüggvényének nevezzük a fv. sor pontonkénti limeszfv.-it, és $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$-el jelöljük, azaz

$$\mathrm{Dom}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) = \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(f_n) \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \text{ konvergens} \right\} \text{ és}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Megj

Jel	Mit jelöl
$f_n(x)$	valós szám
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$	számsorozat
$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$	valós szám (ha konvergens)
$\lim_{n\to\infty} f_n$	$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv.

Jel	Mit jelöl
$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$	numerikus sor
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$	valós szám (ha konv)
$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$	$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv.

Tétel (összegfv. folytonossága) Legyen $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ fv. sor, $x_0 \in \mathrm{Dom}\left(\sum_{n=0}\right.$

Volt fv. sorozatok, fv. sorok, egyenletes konvergencia

- limeszfv. folytonosság, deriválhatóság, integrálhatóság
- összegfv. folytonos

Köv Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folytonos fv.-ek sorozata

(1) Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens $\mathrm{Dom}(\lim_{n\to\infty} f_n)$-en, akkor a $\lim_{n\to\infty} f_n$ limeszfv. folytonos

(2) Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ egyenletesen konvergens $\mathrm{Dom}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)$-en, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfv. folytonos

Tétel (összegfv. diffhatósága) Legyen $I\subseteq\mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\forall n\in\mathbb{N}$-re $f_n: I\to\mathbb{R}$ diffható.

Tfh. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ egyenletesen konvergens I-n és $\exists\, x_0\in I : \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ numerikus sor konvergens $\Rightarrow$

(1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ egyenletesen konvergens I-n

(2) A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ diffható I-n és

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \qquad (\forall x\in I)$$

Biz Fv. sorozatos verzióból köv.

Tétel (összeg fv. integrálhatósága) Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, Tfh.

- A $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ fvsor egyenletesen konvergens $[a,b]$-n
- $\forall n\in\mathbb{N}$-re f_n (Riemann) int.ható $[a,b]$-n

Akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfv. ($\cancel{R}$ R-) intható $[a,b]$-n és

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

<u>Biz</u> Fv. sorozatos verzióból köv.

<u>Def</u> A $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ fv. sor (pontonként) <u>abszolút konvergens</u> a ~~∀~~ $H \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(f_n)$ halmazon, ha $\forall x\in H: \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ numerikus sor konvergens

<u>Tétel</u> (Weierstrass-krit) Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fv. sorozat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat és $H \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(f_n)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n\in\mathbb{N} \quad \|f_n\|_H \leq b_n \\ \bullet\ \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \text{ numerikus sor konv.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ ~~egyenlete~~ fv. sor egyenletesen és abszolút konvergens } H\text{-n}$$

<u>Biz</u>

<u>absz. konv.</u> $x\in H$ $\quad |f_n(x)| \leq b_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konv.

majorkrit.

$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ absz. konv.

<u>egyenletesen konv.</u> Legyen $S := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Szeretnénk: $\left\| S - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_H \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\sup_{x\in H} \left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \qquad (\text{absz konv.} \Rightarrow H \subseteq \mathrm{Dom}(S))$$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}$, hogy $\forall n\in\mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k - \sum_{k=0}^{n} b_k \right|$$

$x \in H$
$n \geq N$

$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \overset{(!)}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{feltétel}}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \varepsilon \xRightarrow[\text{véve}]{\text{sup-ot}} \underbrace{\sup_{x \in H} \left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \leq \varepsilon}$$

$$\left\| S - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_H \Rightarrow \left\| S - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \square$$

$\boxed{\text{Hatványsorok}}$

def A $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ alakú numerikus sorokat hatványsoroknak nevezzük, ahol $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat, $x \in \mathbb{R}$

def Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat

$$R_a := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{, ha } 0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty \\ 0 & \text{, ha } \quad -\text{"}- \quad = +\infty \\ +\infty & \text{, ha } \quad -\text{"}- \quad = 0 \end{cases}$$

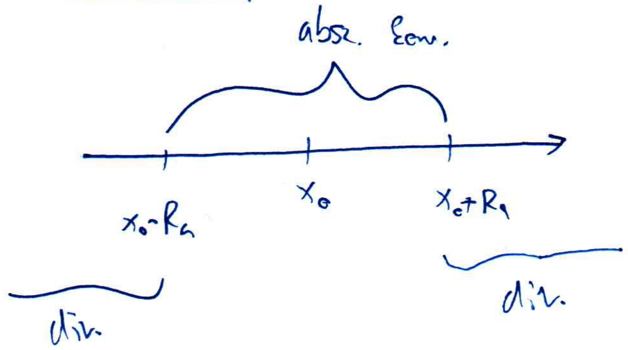
R_a-t az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozathoz tartozó Cauchy-féle konvergenciasugárnak nevezzük

<u>Tétel</u> (Cauchy-Hadamard tétel) Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat, $x, x_0 \in \mathbb{R}$

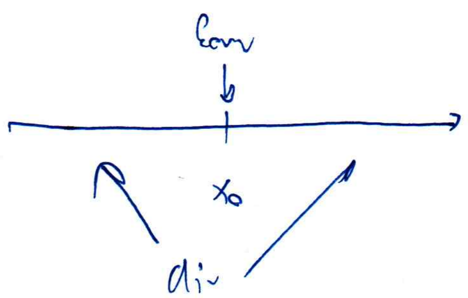
- $|x-x_0| < R_a \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (x-x_0)^n$ abszolút konvergens
- $|x-x_0| > R_a \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (x-x_0)^n$ divergens

---

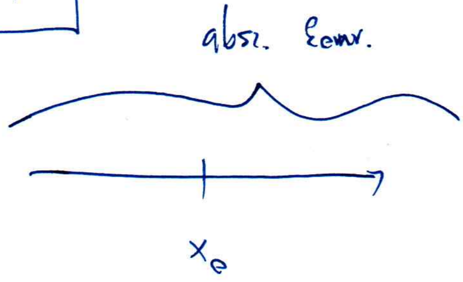
$\boxed{0 < R_a < +\infty}$ ~~absz konv~~



$\boxed{R=0}$



$\boxed{R_a=+\infty}$



Anal eu

2022.03.23
3

$x = x_0$ esetén: $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \underbrace{(x-x_0)^n}_{0} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} 0$ konvergens (és az összeg 0)

Biz (C-H t)

$R_a = 0$: $x \neq x_0$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty > 1$$

$$\Rightarrow a_n(x-x_0)^n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n \text{ divergens}$$

$R_a = +\infty$:

$x \in \mathbb{R}$ $\quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$

gyökkrit.

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n||x-x_0|^n$ konv., azaz $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ abszolút konvergens

$0 < R_a < +\infty$

- $|x-x_0| < R_a$: $\quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = \underbrace{|x-x_0|}_{< R_a} \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{= \frac{1}{R_a}} < 1$

gyökkrit.

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ absz. konv.

mint előbb

- $|x-x_0| < R_a$: $\quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} > 1$

$\Rightarrow a_n(x-x_0)^n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ <div> <\div>

Tétel (konvergencia meghatározása gyökvonással) Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek egyik tagja sem 0, és tfh. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\exists$

Ekkor

$$R_a=\begin{cases}\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}, & \text{ha } 0<\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<+\infty\\ 0, & \text{ha } \text{— " —} =+\infty\\ +\infty, & \text{ha } \text{— " —} =0\end{cases}$$

Biz Korábbi: lemma volt.

Pél $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{1}{(-5)^n\cdot n}(x-2)^n$ $\quad$ ($2 = x_0$) milyen $x\in\mathbb{R}$ esetén konvergens?

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{1}{5^n\cdot n}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[n]{n}}\longrightarrow\frac{1}{5}\to R_a=5$$

$\overset{\text{C-H-t}}{\Longrightarrow}$ $x\in\,]x_0-R_a,x_0+R_a[\,=\,]-3,7[$ esetén (abszolút) konvergens

$x\in\mathbb{R}\setminus]-3,7[$ esetén divergens

$x=-3=x_0-R_a$ $\qquad x-x_0=-R_a=-5$

$\frac{1}{(-5)^n n}\cdot(-5)^n=\frac{1}{n}\to$ divergens

$x=7\to\frac{(-1)^n}{n}$ Leibniz-sor, konvergens

Hatványfüggvény-sorok

$id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$

<u>def</u> Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$. A

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n$$

függvénysort $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>együtthatójú és x_0 középpontú hatványfüggvény-sornak nevezzük</u>

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n\right)}_{\text{összegfv.}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

<u>Tétel</u> (Hatv. fv. sorok tulajdonsága) Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$, és tfh. $R_a > 0$.

(1) A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ összegfv. folytonos az $]x_0 - R_a ; x_0 + R_a[$-on

(2) Ha $R_a < +\infty$ és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n R_a^n$ numerikus sor (illetve a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (-R_a)^n$ numerikus sor) konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ összegfv folytonos $x_0 + R_a$-ban (illetve $x_0 - R_a$-ban)

(BN)

(3) A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ összegfv. diff.ható $]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$-on és

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right.$

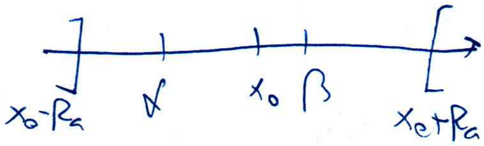
Tétel Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat, $x_0\in\mathbb{R}$ és tfh. $R_a>0$.
Ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)^n$ hatv. fv. sor

(1) abszolút konvergens az $]x_0-R_a, x_0+R_a[$ intervallumon

(2) $\forall \alpha,\beta\in\,]x_0-R_a, x_0+R_a[$, $\alpha<\beta$ esetén $[\alpha,\beta]$-on egyenletesen konvergens

Biz (1) Cauchy–Hadamard-tételből konvergens
(ha $|x-x_0|<R_a \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ absz. konv.)

(2)



Legyen α,β a fenti tulajdonságú
$\gamma := \min\{|\alpha-x_0|, |\beta-x_0|\}$

$\gamma<R_a \qquad x\in[\alpha,\beta] \Rightarrow |a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|\gamma^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|\gamma^n$$

$$\|a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)\|_{[\alpha,\beta]} \leq |a_n|\gamma^n \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\gamma^n$ konv (mert $\gamma<R_a$) $\Downarrow$ Weierstrass-krit

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)^n$ konv. $[\alpha,\beta]$-on

$\square$

Tétel Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat, $x_0\in\mathbb{R}$ és tfh $R_a>0$

(1) A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)^n$ összegfv. folytonos az $]x_0-R_a, x_0+R_a[$-on

(2) Ha a $\overset{(R_a<+\infty)}{\sum_{n\in\mathbb{N}}} a_n(R_a)^n$ numerikus sor (illetve $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(-R_a)^n$)

konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)^n$ összeg fv. folytonos

x_0+R_a-ban (illetve x_0-R_a-ban)

Biz

(1) $z\in\,]x_0-R_a, x_0+R_a[$

Legyen $\alpha,\beta\in\,]x_0-R_a, x_0+R_a[$, hogy $z\in\,]\alpha,\beta[$

$\overset{\text{előző tétel}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)^n$ egyenletesen konvergens $[\alpha,\beta]$-on

$\Longrightarrow$ összegfv. folytonos z pontban

(2) $\emptyset$

$\square$

Megj $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat, $x_0\in\mathbb{R}$ és legyen K a

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)^n$ hatv. fv. sor konvergenciatartománya

$\xrightarrow[\text{tétel}]{\text{z-vel előtti}} 0<R_a<+\infty:\ ]x_0-R_a, x_0+R_a[\,\subseteq K\subseteq[x_0-R_a, x_0+R_a]$

$R_a=0 \qquad K=\{x_0\}$

$R_a=+\infty \qquad K=\mathbb{R}$

$\overset{\text{előző}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ az összegfv. folytonos K-n

Anal ea

2022.03.26

2

Tétel Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat, $x_0\in\mathbb{R}$ és tfh. $R_a>0$. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)^n$ összegfv. differenciálható $]x_0-R_a, x_0+R_a[$-n

és

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{a_n(id_{\mathbb{R}}-x_0)^n}^{f_n}\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\underbrace{n\cdot a_n}_{b_{n-1}}(x-x_0)^{n-1}}^{f_n'(x)}$$

$$(\forall x\in\,]x_0-R_a, x_0+R_a[)$$

Továbbá $R_a=R_b$ (azaz a deriválás során a konv. sugár nem változik meg.)

Biz $R_a=R_b$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1} \text{ konv} \overset{x\neq x_0}{\iff} \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n (x-x_0)^n$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot|a_n|} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \implies R_a=R_b$$

deriválhatóság $z\in\,]x_0-R_a, x_0+R_a[$

Legyen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, hogy

$$z\in\,]\alpha,\beta[\, \subseteq [\alpha,\beta] \subseteq\,]x_0-R_a, x_0+R_a[$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ egyenletesen konvergens $[\alpha,\beta]$-on (első tétel)

és pl. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ konv. $\implies$ összegfv. diffható $]\alpha,\beta[$-n és speciálisan z-ben is és

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n\right)'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$\square$

Tétel legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat $x_0 \in \mathbb{R}$, és tfh. $R_a > 0$.
Ekkor az $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ összegfv. Riemann-integrálható az $[\alpha, \beta]$-on
(ahol $\alpha < \beta$ és $\alpha, \beta \in]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$), és

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n (x - x_0)^n dx$$

Biz $[\alpha, \beta]$-on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ látágfv. egyenletesen konv.

$\xRightarrow[\text{tétel}]{\text{korábbi}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n$:

[...]

Pél $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x| < 1$, itt $x_0 = 0$ és $R = 1$

① Deriváljuk mindkét oldalt!

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$

$\Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x^2)}$ $/ \cdot x$

$\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

Anal ea

② $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ $\quad (|t|<1)$

int. 0-tól x-ig (ahol $|x|<1$)

bal.e. $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

jobb.e. $\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(1-t)\right]_{t=0}^{x} = -\ln(1-x)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \qquad (|x|<1)$

$x=-1$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ konv.

$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x\in[-1,1[)$

2. tét.-e
$\Rightarrow$ φ folytonos -1-ben

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \qquad x\in[-1,1[$

Spec $(x=-1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\ln(2) \qquad /\cdot(-1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots = \ln(2)$

③ $\psi(x) := \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot x^{n-2}$ Dom(ψ) = ?

$\psi(x)$ zárt alakban?

$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^+ \\ n\geq 2}} n x^{n-2}$ konv $\iff \sum_{n\in\mathbb{N}} n x^{n}$ konv.

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1 \Rightarrow$ konv. sugár $= 1$

$x_0 = 0$

$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq 2}} n(-1)^{n-2} \not\to 0$, $\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq 2}} n \not\to 0$ divergensek

?

Összegezve hatv. fv. sor. ~~összegével~~ összegfüggvénye a

Taylor-polinomok, Taylor-sorok

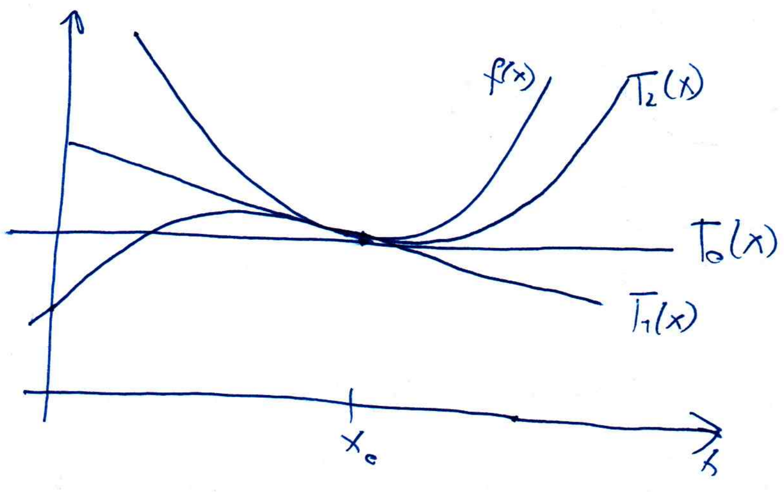
<u>def</u> Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. és tfh. f az x_0 pontban n-szer diffható. Ekkor az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ függvényt az f x_0-beli $n$edrendű Taylor-polinomjának nevezzük és T^f_{n,x_0}-lal jelöljük (vagy T_{n,x_0}-lal, vagy T_n-nel)

<u>Megj.</u> $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T^f_{0,x_0}(x) = f(x_0)$ $\qquad$ $T^f_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

x_0-beli érintő egyenese

$T^f_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x-x_0)^2$ parabola



<u>Belátható:</u>

$\left(T^f_{n,x_0}(x_0)\right)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $\qquad k = 0, 1, \ldots, n$

Tétel (Lagrange-maradéktagos Taylor-formula)

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, és tfh, az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. $n+1$-szer deriválható $]x_0 - r, x_0 + r[$-on

Ekkor $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ $\exists \xi$, amely x és x_0 „között van"

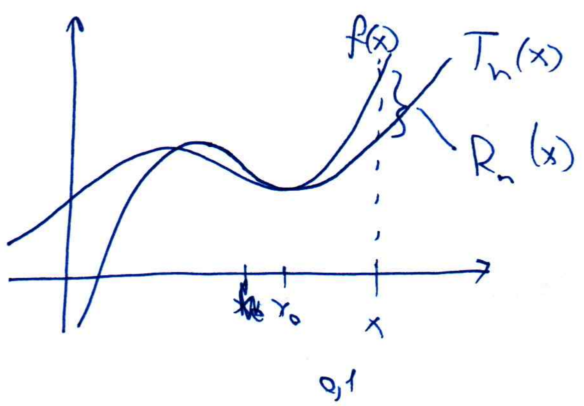
(azaz $\xi \in]x, x_0[$ vagy $\xi \in]x_0, x[$), hogy

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{T^f_{n,x_0}(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Biz $\emptyset$

Megj $n=0$-ra ~~ezt~~ ez a Lagrange-középértéktétel

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$



Pél ~~[illegible]~~ Közelítsük $\int_0^{0,1} e^{\sin(x)}\,dx$ integrálját az integrandus másodrendű Taylor-polinomjának segítségével és adjunk felső becslést az elkövetett hibára

Anal ea

2022.03.28

#2

$$f(x)=e^{\sin(x)} \quad (x\in\mathbb{R}) \Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=e^{\sin(x)}\cdot\cos(x) \quad (x\in\mathbb{R}) \Rightarrow f(0)=1$$

$$f''(x)=e^{\sin(x)}\cdot\left(\cos^2(x)-\sin(x)\right) \quad (x\in\mathbb{R}) \Rightarrow f(0)=1$$

$$T_{2,0}(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^{0,1} 1+x+\frac{x^2}{2}\,dx=\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{0,1}=0,105176$$

$$\int_0^{0,1} f(x)\,dx$$

Hibabecslés: $\left|f(x)-T_2(x)\right|\leq\dfrac{\left|f^{(3)}(\xi)\right|}{3!}x^3$

$$f'''(x)=e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\left(\cos^2(x)-\sin(x)\right)+e^{\sin(x)}\left(-2\cos(x)\sin(x)-\cos(x)\right)=$$

$$=[\ldots]=e^{\sin(x)}\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\left(\sin(x)+3\right) \quad (x\in\mathbb{R})$$

integrál hibájának becslése

$$\left|\int_0^{0,1} f(x)\,dx-\int_0^{0,1}T_2(x)\,dx\right|\leq\int_0^{0,1}\left|f(x)-T_2(x)\right|dx\leq$$

$$\left[\frac{f'''(\xi)}{3!}\leq e^{0,1}\cdot\frac{0,2}{2}(0,1+3)\right]$$

$$\leq\int_0^{0,1}\underbrace{e^{0,1}\cdot 0,1\cdot 3,1}_{C}\cdot x^3\,dx=C\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{0,1}=C\cdot\frac{0,1^4}{4}\approx 10^{-5}$$

def Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. $x_0 \in \mathbb{R}$ és tfh. f végtelenszer diffható x_0-ban Ekkor

$\left(T_{n,x_0}^{f}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysort az f x_0-beli Taylor-sorának nevezzük és az összegfv.-ét $T_{x_0}^{f}$-fel jelöljük azaz $\forall x \in$ $Dom\left(T_{x_0}^{f}\right)$

$$T_{x_0}^{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Kérdés $f(x) \overset{?}{=} T_{x_0}^{f}(x)$ milyen f-ekre teljesül

Tétel (Hatv. fv.-sor együtthatóinak egyértelműsége)

Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$, tfh $R_a > 0$ és jelölje f $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (id_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ összegfv.-ét, azaz $\forall x \in$ $Dom(f)$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

Ekkor f végtelenszer diffható $]x-R_a, x+R_a[$-on és

$$f^{(\ell)}(x_0) = \ell! \cdot a_\ell$$

Biz Hatv. fv. sor összegfv.-ének deriválhatóságáról szóló tétel

$\Rightarrow f$ diffható $]x_0-R_a, x_0+R_a[$-on és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-x_0)^{n-1} \quad (\forall x \in]x-R_a, x+R_a[)$$

teljes ind. $\Rightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}$ f ℓ-szer diffható $]x_0-R_a, x_0+R_a[$-en

$$f^{(\ell)}(x) = \sum_{n=\ell}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-\ell+1)\, a_n (x-x_0)^{n-\ell} \Rightarrow f^{(\ell)}(x_0) = \ell!\, a_n$$

Anal ea

2022.03.28
3

def Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. **analitikus** az **$x_0 \in \mathbb{R}$ pontban**, ha $\exists r > 0$, hogy $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq D_m(f)$, illetve $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat, hogy $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ esetén

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Tétel (az analitikusság jellemzése)

Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. $x_0 \in \mathbb{R}$ és tfh. f végtelenszer diff.ható x_0-ban. Ekkor ekvivalensek:

(1) f analitikus x_0-ban

(2) $\exists r > 0$, hogy $f(x) = T_{x_0}^f(x)$ $\quad (\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[)$

(Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy f-et előállítja az x_0-beli Taylor-sor $]x_0 - r, x_0 + r[$-on)

Biz (1) $\Rightarrow$ (2) $\quad \exists r > 0 \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[)$$

$$\overset{\text{előző t.}}{\Rightarrow} \quad f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = T_{x_0}^f(x) \qquad (\forall x \in \ldots)$$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad \exists r > 0$; $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (\forall x \in \ldots)$

$\Rightarrow$ f analitikus x_0 pont. $\quad \square$

def Azt mondjuk, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fv. sorozat egyenletesen korlátos a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy

$$|f_n(x)| \le K \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in H)$$

Tétel (elégséges feltétel pontbeli analitikusságra)

Legyen $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, és tfh. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. végtelenszer diffható $]x_0 - r, x_0 + r[$-on és az $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen korlátos $]x_0 - r, x_0 + r[$-on

Ekkor $f(x) = T_{x_0}f(x)$ $\quad (\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[)$

(azaz f analitikus x_0-ban

Biz

$$f(x) \overset{?}{=} T_{x_0}^{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ $\quad n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Taylor-formula}} \exists \xi \in]x_0 - r, x_0 + r[$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x_0)^k \right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \le \frac{K}{(n+1)!} r^{n+1} \to 0$$

$\exists K$ a deriváltak egy korlátja ? miatt ?

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$\square$

Anal ea

2022.03.28
4

Tétel (nevezetes fv. ek hatványsor előállítása)

Az exp, sin, cos, sh, ch függvények előállíthatók a 0-beli Taylor-sora $\mathbb{R}$-en és $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$sh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2x+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$ch(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Anal Gy

2022.03.30

1

Tétel Az exp, sin, cos, sh, ch fv.-eket előállítja a 0-beli Taylor-sora $\mathbb{R}$-en és $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad \sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\qquad \cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{sh}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\qquad \operatorname{ch}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Biz $\boxed{\exp}$: $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exp^{(n)}=\exp$

Legyen $x\in\mathbb{R}$, $R>|x|$

ha $|t|<R \Rightarrow |\exp(t)|=|e^t|\le e^R$

$(\exp^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen korlátosak $]-R,R[$-on

$$\overset{\text{előző}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}\quad e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$\boxed{\sin}$ teljes indukcióval belátható: $\sin^{(4k)}=\sin$

$\sin^{(4k+1)}=\cos\qquad \sin^{(4k+2)}=-\sin\qquad \sin^{(4k+3)}=-\cos$

$\sin^{(4k)}(0)=\sin(0)=0$

$\sin^{(4k+1)}(0)=\cos(0)=1$

$\sin^{(4k+2)}(0)=-\sin(0)=0$

$\sin^{(4k+3)}(0)=-\cos(0)=-1$

$|\sin^{(n)}(x)|\le 1\quad (\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}) \Rightarrow (\sin^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

egyenletesen korlátos $\mathbb{R}$-en $\overset{\text{előző}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ $\sin(x)=T_0^{\sin}(x)=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cancel{\sin(x)}\ \sin^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\qquad(\forall x\in\mathbb{R})$$

$\boxed{\cos}$ ugyanígy...

$\boxed{sh}$ $\quad sh^{(2k)} = sh \qquad sh^{(2k+1)} = ch$

$$sh^{(2k)}(0) = sh(0) = 0$$
$$sh^{(2k+1)}(0) = ch(0) = 1$$

$x \in \mathbb{R}$ és $R > |x|$

$$|sh(t)| = \left|\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right| \leq e^R \Rightarrow (sh^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ egyenletesen korlátos }]-R,R[\text{-on}$$

$$\xRightarrow[\text{tétel}]{\text{előző}} sh(x) = T_0^{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sh^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$\boxed{ch}$ ugyanígy...

Két fontos példa

① $f(x) = \ln(1+x) \qquad (x > -1)$

Állítsuk elő $f(x)$-et a 0 körüli Taylor-sora segítségével

Első megközelítés: $f^{(n)}(0) = ?$ + egyenletesen korlátos
(mint az előbbi bizonyításban)

Második megközelítés: próbáljuk felírni egyből a Taylor-sor-alakot

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad (x > -1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \overset{|x|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^n$$

$|x| < 1$

$$f(x) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{f(0)} + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^n\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{x} =$$

Newton–Leibniz $\qquad$ konvergencia-tartomány belsejében

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = T_0^f(x) \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (|x| < 1)$$

$x=1$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konv (Leibniz)

$x=-1$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}$ div.

folytonosság $\Rightarrow$ miatt $\quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x\in\,]-1,1[$

② Az arctg fv.-t állítsuk elő a 0 kp-ú Taylor-sorával (a 0 egy környezetében)

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{1-(-x^2)} \overset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\operatorname{arctg}(x) \overset{\text{Newton-Leibniz}}{=} \underbrace{\operatorname{arctg}(0)}_{=0} + \int_0^x \operatorname{arctg}'(t)\,dt = \int_0^x \sum_{t=0}^{\infty} (-t^2)^n\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_{t=0}^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (\text{ha } |x|<1$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x|<1)$$

$x=1$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konv (Leibniz)

$x=-1$ $\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ konv (Leibniz)

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x\in[-1,1])}$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots = \frac{\pi}{4}\ !$$

Binomiális sor

Emlék

binom tétel $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ $(x,y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

ezt általánosítjuk valós kitevőre

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

def $\alpha \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} & \text{ha } k \neq 0 \\ 1 & \text{ha } k = 0 \end{cases}$$

Tétel $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall x \in]-1,1[$ esetén $\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{\alpha}{k} x^k$ konvergens és

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{(BINOMIÁLIS SORFEJTÉS)}$$

Biz Ha $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow k > \alpha$ $\binom{\alpha}{k} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k \underset{\text{binom. tétel}}{=} (1+x)^\alpha$$

Ha $\alpha \notin \mathbb{N}$ konv. sugár hányadoskrit-al

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}}\right| = \left|\frac{\cancel{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot}(\alpha-k)}{(k+1)\cancel{!}}\right| \cdot \left|\frac{\cancel{k!}}{\cancel{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| \xrightarrow{k\to\infty} 1 \to R = \frac{1}{1} = 1$$

Anal an

2022.03.30
3

$\Rightarrow$ konv. sugár $= \frac{1}{1} = 1$

CH

$\Rightarrow \forall x \in]-1,1[\quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{\alpha}{k} x^k$ (abs) konvergens

Legyen $f(x) = (1+x)^\alpha \qquad (x\in]-1,1[)$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad (x\in]-1,1[)$$

Belátjuk, hogy $\left(\frac{P}{f}\right)' \equiv 0$

$$\left(\frac{P}{f}\right)'(x) = P'(x)\cdot(1+x)^{-\alpha} - \alpha P(x)(1+x)^{-\alpha-1} =$$

$$= (1+x)^{-\alpha-1}\underbrace{\left(P'(x)(1+x) - \alpha P(x)\right)}_{0 \leftarrow \text{belátjuk}}$$

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k} x^{k-1}$$

$$P'(x)(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k} x^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{(k-1)!} x^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{(k-1)!} x^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k)}{k!} x^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{(k-1)!} x^{k} =$$

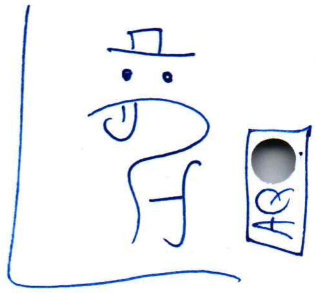
$$= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k)}{k!} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{(k-1)!} x^{k}$$

$+$

$\boxed{?}$

$+$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\underbrace{(\alpha-k+k)}_{\alpha}}{k!} =$$



$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha P(x) \Rightarrow \left(\frac{P}{f}\right)' = 0 \quad]-1,1[\text{ intervallumon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad P = c \cdot f$$

$$P(0) = 1 \qquad f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f = P$$

$\square$

Pél

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x^2}} \qquad f^{(99)}(0) = f'''(0) = ?$$

$$f^{(100)} = f''(0) = ?$$

Itt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (0 egy környezetében)

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f(x) = (16-x^2)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(-x)^3}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \left(\frac{-x^3}{16}\right)^k$$

x^{100} el.-ja $0 \rightarrow f^{(100)}(0) = 0$

x^{99} el.-ja ($k=33$) $\boxed{\frac{1}{2}\binom{-\frac{1}{4}}{33}\frac{(-1)^{33}}{16^{33}}}$

$\Rightarrow f^{(99)} = 99! \cdot$

$\boxed{?}$ hr. 2

Anal ea

Többváltozós függvényanalízis

2022.04.04
1

$\mathbb{R}^n$ topológiája

Skalárszorzás $\quad x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

def $\underline{x}$ és $\underline{y}$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorok ortogonálisak, ha a skalárszorzatuk 0.

A $v_1, \dots, v_k$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszert ortogonálisnak nevezzük, ha a tagjai páronként ortogonálisak.

Áll Ha a $v_1, \dots, v_k$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer ortogonális és egyik tagja sem 0, akkor lin. ftlen.

Biz.:

Előbb egy Lemma:

L: $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

(1) $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \geq 0$ és $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

(2) $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle \qquad$ (szimmetrikus)

(3) $\langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$ és

$\langle \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle \qquad$ bilineáris

(4) $\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \lambda \underline{y} \rangle$

Biz $\emptyset$

Biz (déd)

Legyen $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_e \cdot \underline{v}_j = \underline{0} \qquad \langle \cdot, \underline{v}_e \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \underline{v}_j, \underline{v}_e \rangle = 0$$

$$\|$$

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \langle \underline{v}_j, \underline{v}_e \rangle = \lambda_e \langle \underline{v}_e, \underline{v}_e \rangle \to \lambda_e = 0$$

$\square$

Norma, távolság, szög:

def $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (\underline{x} \text{ normája vagy hossza})$$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad (x \text{ és } y \text{ távolsága})$$

def A $v_1, \dots, v_e$ $\mathbb{R}^n$-~~beli~~ beli vektorrendszer ortonormált ha ortogonális és $\forall$ foglyának normája 1.

Megj: • $\mathbb{R}^n$-beli standard bázis ortonormált

• Ha $V \le \mathbb{R}^n$ altér és $e_1, \dots, e_k$ ortonormált bázis V-ben, akkor:

$$\underline{x} \in V \to \exists!\, \lambda_1, \dots, \lambda_e \in \mathbb{R} \qquad \underline{x} = \sum_{j=1}^{e} \lambda_1 \underline{e}_j \quad / \langle \cdot, \underline{e} \rangle \quad e \in \{1, \dots, e\}$$

$$\langle \underline{x}, \underline{e}_e \rangle = \langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underline{e}_e \rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle e_j, \underline{e}_e \rangle = \lambda_e \langle \dots \rangle = \lambda ?$$

Anal ea

2022.04.03
2

Tétel (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség) $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|$$

Biz $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle \underline{x} - \lambda \underline{y}, \underline{x} - \lambda \underline{y} \rangle = \underbrace{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle - 2\lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \lambda^2 \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle}_{p(\lambda) \text{ másodfokú polinom}}$$

$\Rightarrow$ diszkr. ≤ 0 $\Longleftrightarrow$ $4\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 - 4\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle \leq 0$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 \leq \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle$$

$\square$

Def $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\arccos\left(\frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) \longleftrightarrow \underline{x} \text{ és } \underline{y} \text{ szöge}$$

Topológiai alapfogalmak $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

$B_r(x) := \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{y}\| < r \}$ ($\underline{x}$ kp-ú nyílt gömb)

$\overline{B}_r(x) := \{ y \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - y\| \leq r \}$ ($\underline{x}$ kp-ú zárt gömb)

$\dot{B}_r(x) : B_r(x) \setminus \{\underline{x}\}$ ($\underline{x}$-kp-ú pontozott gömb)

Def Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$, A_z $x \in \mathbb{R}^n$ a H halmaz ~~belső pontja~~

- belső pontja, ha $\exists r > 0$, hogy $B_r(x) \subseteq H$
- határpontja, ha $\forall r > 0$ esetén $B_r(\underline{x}) \cap H \neq \emptyset$ $B_r(\underline{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus H) \neq \emptyset$

- érintési pontja, ha $\forall r>0$ esetén $B_r(\underline{x}) \cap H \neq \emptyset$
- torlódási pontja, ha $\forall r>0$ esetén $\underbrace{(B_r(\underline{x}) \setminus \{\underline{x}\})}_{\dot{B}_r(\underline{x})} \cap H \neq \emptyset$
- izolált pontja, ha $\exists r>0$, hogy $\dot{B}_r(\underline{x}) \cap H = \emptyset$
  és $x \in H$

Jelölés: $H \subseteq \mathbb{R}^n$

- H belső pontjainak halmaza $\qquad int(H) \leftarrow H$ belseje
- H határ —— " —— $\qquad \partial H$
- H érintési —— " —— $\qquad \overline{H} \leftarrow H$ lezártja
- H torlódási —— " —— $\qquad H'$
- H izolált —— " —— $\qquad iso(H) \leftarrow$ (nem sztenderd)

def A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz

- nyílt, ha $int(H) = H$
- zárt, ha $\mathbb{R}^n \setminus H$ nyílt
- korlátos, ha $\exists r>0 : B_r(\underline{0}) \supseteq H$
- kompakt: korlátos és zárt

Lemma $H \subseteq \mathbb{R}^n$

H zárt $\Leftrightarrow \partial H \subseteq H \Leftrightarrow H' \subseteq H$

H nyílt $\Leftrightarrow H \cap \partial H = \emptyset$

Bi: $\emptyset$

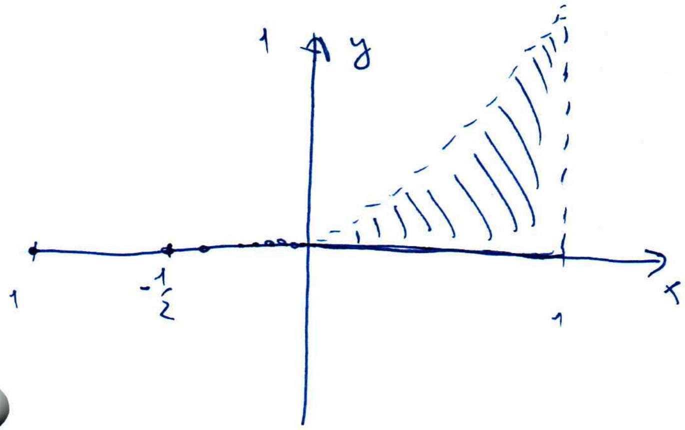
Anal ea

2022.04.05

3

Pél $H \subseteq \mathbb{R}^2$

$$H := \underbrace{\left\{\left(-\tfrac{1}{n}, 0\right),\ n \in \mathbb{N}^+\right\}}^{H_1} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x < 1,\ 0 \le y < x^2\right\}$$



$\mathrm{int}(H) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x^2\}$

$\partial H = H_1 \cup \{(x,0) : 0 \le x \le 1\} \cup$

$\cup \{(x, x^2) : x \in [0,1]\} \cup$

$\cup \{\cancel{\ }(1,y) : 0 \le y \le 1\}$

$\bar{H} = H \cup \partial H$

$\mathrm{iso}(H) = H_1$

$H' = \bar{H} \setminus H_1$

Pél $\forall$ nyílt ~~...~~ ~~...~~ ~~...~~ gömb nyílt halmaz

$\forall$ zárt gömb zárt halmaz

$\emptyset, \mathbb{R}^n$ nyílt és zárt egyszerre

Sorozatok, konvergencia

Def Azt mondjuk, hogy az $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat konvergens, és határértéke $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, ha

$$\|\underline{x}_k - \underline{x}\| \xrightarrow{k \to \infty} 0 \qquad [\ldots]$$

Jelölés $\underline{x}_k \xrightarrow{k \to \infty} \underline{x}$ vagy $\lim_{k \to \infty} \underline{x}_k = \underline{x}$

Áll (koordináta konvergencia) Legyen $(\underline{x}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^n$-be haladó sorozat és $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$. Ekkor

$$\forall j\in\{1,\dots,n\}$$

$$\underline{x}_\ell \xrightarrow{\ell\to\infty} \underline{x} \iff (x_\ell)_j \xrightarrow{(\ell\to\infty)} x_j$$

Biz $\Rightarrow$

Tfh. $\|\underline{x}_\ell-\underline{x}\| \xrightarrow{\ell\to\infty} 0$, $j\in\{1,\dots,n\}$

$\varepsilon>0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon)$, hogy $\ell\geq N(\varepsilon)$ és $\ell\in\mathbb{N}$ esetén

$$\|\underline{x}_\ell-\underline{x}\|<\varepsilon$$

$\ell\geq N(\varepsilon)$

$$|(x_\ell)_j-x_j|=\sqrt{((x_\ell)_j-x_j)^2}\leq\sqrt{\sum_{j=1}^n((x_\ell)_j-x_j)^2}=\|\underline{x}_\ell-\underline{x}\|<\varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\varepsilon>0$? $N(\varepsilon)$, hogy $\ell>N(\varepsilon)$

$$\|\underline{x}_\ell-\underline{x}\|<\varepsilon$$

$\exists N_j(\varepsilon)$ $\forall j\in\{1,\dots,n\}$, hogy $\ell\geq N_j(\varepsilon)$ $|(x_\ell)_j-x_j|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$N(\varepsilon):=\max\limits_{j=1\dots n} N_j(\varepsilon)$ $\qquad \ell\geq N(\varepsilon)$

$$\|\underline{x}_\ell-\underline{x}\|=\sqrt{\sum_{j=1}^n((x_\ell)_j-x_j)^2}\leq\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}\cdot n}=\varepsilon \qquad \square$$

Többváltozós függvények határértéke, folytonossága

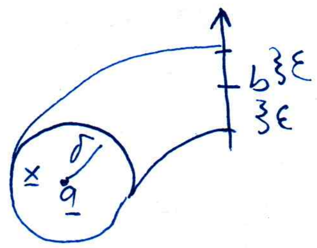
<u>def</u> Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fv. $\underline{a}$ egy torlódási pontja $Dom(f)$-nek és $b\in\mathbb{R}$.

Azt mondjuk, hogy az f fv. $\underline{a}$ pontbeli b szám, ha

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$, hogy $\underline{x}\in Dom(f)$, $\|\underline{x}-\underline{a}\|<\delta$ és $\underline{x}\neq\underline{a}\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(\underline{x})-b|<\varepsilon$

Jelölés $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})=b$



<u>def</u> Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ és $\underline{a}\in Dom(f)$.

Azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos az $\underline{a}$ pontban, ha

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$, hogy $\underline{x}\in Dom(f)$ és $\|\underline{x}-\underline{a}\|<\delta\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(\underline{x})-f(\underline{a})|<\varepsilon$

Ha nem folytonos $\underline{a}$-ban, akkor azt mondjuk hogy f-nek szakadása van $\underline{a}$-ban.

f-et folytonosnak nevezzük, ha $Dom(f)$ $\forall$ pontjában folytonos

Tétel (átviteli elv) Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fv.

(1) Legyen $\underline{a} \in Dom(f)'$, ekkor $b \in \mathbb{R}$ [Dom(f) torlódási pontjainak halmaza]

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = b \iff \begin{cases} \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \; Dom(f) \setminus \{\underline{a}\}\text{-ban haladó sorozatra} \\ \underline{x}_k \to \underline{a} \implies f(\underline{x}_k) \xrightarrow{(k \to \infty)} b \end{cases}$$

(2) Legyen $\underline{a} \in Dom(f)$. Ekkor

$$f \text{ folytonos } \underline{a}\text{-ban} \iff \begin{cases} \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \; Dom(f)\text{-ben haladó sorozatra} \\ \underline{x}_k \xrightarrow{k \to \infty} \underline{a} \implies f(x_k) \xrightarrow{k \to \infty} \underline{a} \end{cases}$$

Biz $\emptyset$

Köv.: (Határérték és folytonosság kapcsolata) Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv. és $\underline{a} \in Dom(f) \cap Dom(f)'$. Ekkor f folytonos $\underline{a}$-ban $\iff$

$\iff \lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) \; \exists$ és $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$

Pél $f(x,y,z) = xy^3 + z\sin(x) \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

f folytonos, mert $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, tetsz.

$$(x_k, y_k, z_k) \xrightarrow{k \to \infty} (x_0, y_0, z_0) \iff \begin{matrix} x_k \to x_0 \\ y_k \to y_0 \\ z_k \to z_0 \end{matrix} \quad (k \to \infty)$$

$$f(x_k, y_k, z_k) = x_k y_k^3 + z_k(\sin(x_k)) \xrightarrow{k \to \infty} x_0 y_0^3 + z_0 \cdot \sin(x_0)$$

Tétel (a folytonosság és fv. műveletek kapcsolata)

Legyen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\underline{a} \in Dom(f) \cap Dom(g)$.

Ha f és g folytonosak $\underline{a}$-ban $\Rightarrow$ λf, $f+g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ is folytonosak az $\underline{a}$-ban ($\frac{f}{g}$ csak $g \neq 0$ feltétellel)

Biz

(I) $\underline{a} \in Dom(f)$ és $\underline{x}_\ell \xrightarrow{(\ell \to \infty)} \underline{a}$ $(\underline{x}_\ell \in Dom(f)\ \forall \ell \in \mathbb{N})$

$\overset{f \text{ folyt}}{\underset{a\text{-ban}}{\Longrightarrow}}$ $f(\underline{x}_\ell) \xrightarrow{(\ell \to \infty)} f(\underline{a}) \Rightarrow \underbrace{\lambda f(\underline{x}_\ell)}_{(\lambda f)(\underline{x}_\ell)} \xrightarrow{\ell \to \infty} \underbrace{\lambda f(\underline{a})}_{(\lambda f)(\underline{a})}$

$\overset{\text{átv.}}{\underset{\text{elv.}}{\Longrightarrow}}$ λf folytonos $\underline{a}$-ban

(II) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosak $\underline{a}$-ban

$\underline{x}_\ell \xrightarrow{\ell \to \infty} \underline{a}$ $(\underline{x}_\ell \in Dom(f) \cap Dom(g)\ \forall \ell \in \mathbb{N})$

$\overset{f, g \text{ folyt}}{\underset{a\text{-ban}}{\Longrightarrow}}$ $\left.\begin{array}{l} f(\underline{x}_\ell) \to f(\underline{a}) \\ g(\underline{x}_\ell) \to g(\underline{a}) \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$

$(f+g)(\underline{x}_\ell) = f(\underline{x}_\ell) + g(\underline{x}_\ell) \to \underbrace{f(\underline{a}) + g(\underline{a})}_{(f+g)(\underline{a})}$

$(f \cdot g)(\underline{x}_\ell) = f(\underline{x}_\ell)\, g(\underline{x}_\ell) \to \underbrace{f(\underline{a}) \cdot g(\underline{a})}_{(f \cdot g)(\underline{a})}$

(III) [...]

Tétel (fv. kompozíció folytonossága)

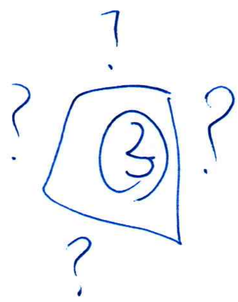
Legyen $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv.-ek. Ha g folytonos $\underline{a}\in\mathbb{R}^n$ pontban és f folytonos $g(\underline{a})$-ban akkor $f\circ g$ is folytonos $\underline{a}$-ban.

Biz [...]

Jel $H\subseteq\mathbb{R}^n$, $\underline{a}\in\mathbb{R}^n$

$H+\underline{a} := \{\underline{x}+\underline{a} : \underline{x}\in H\}$

$H-\underline{a} := \{\underline{x}-\underline{a} : \underline{x}\in H\}$



Megj. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\underline{a}\in \mathrm{Dom}(f)$

$g: \mathrm{Dom}(f)-\underline{a}\to\mathbb{R};\quad \underline{x}\mapsto f(\underline{x}+\underline{a})$

f-nek $\exists$ $\underline{a}$-ban határértéke $\iff$ g-nek $\exists$ $\underline{0}$-ban határértéke

Ekkor $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} g(\underline{x})$

Áll (szükséges feltétel 2-változós fv.-ek origóbeli határértékének létezésének) Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ és tfh. $(0,0)$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)\cup\{(0,0)\}$-nak. Ha f-nek $\exists$ határértéke $(0,0)$-ban és $\lim\limits_{\underline{x}\to(0,0)} f(\underline{x}) = b \implies$

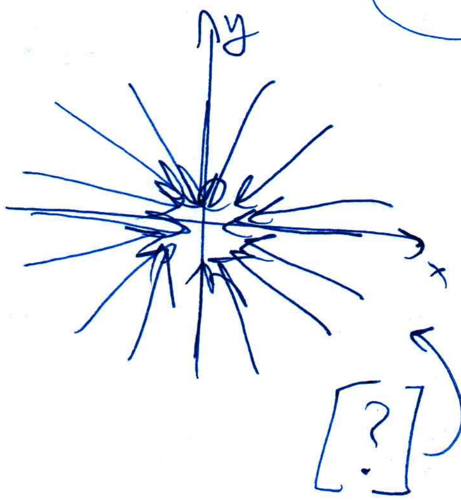
① $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = b$

Anal ea

(2) $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = b$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = b$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = b \quad (\forall m\in\mathbb{R})$



(5) Ha $\exists r>0$, hogy $\forall\, 0<x<r$ esetén $\lim\limits_{y\to 0} f(\cancel{\ }x,y)\ \exists$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = b$

(6) Ha $\exists r>0$, hogy $\forall\, 0<y<r: \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = b$

Bz: $\emptyset$

Pél

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$, ha

(1) $f(x,y) = \dfrac{xy^2+e^{xy}+3}{1+x^2}$

f folytonos $(0,0)$-ban $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \dfrac{0\cdot 0^2+e^0+3}{1+0^2} = \underline{\underline{4}}$

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^4} \qquad (x,y)\neq(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ ($\Rightarrow$ Ha $\exists$ határérték, akkor az 0)

$\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \longrightarrow \nexists$ origóbeli határérték

③ $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (...)

Előző áll 1-6 teljesül $b=0$-val ($\Leftrightarrow$ ha $\exists$ határérték, akkor az 0)

Ugyanakkor átviteli elv segítségével

$\left(\frac{1}{k}, 0\right) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ $\quad f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ $\quad f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^4}\cdot\frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2}$

$\neq \Rightarrow \nexists$ h.é.

④ $f(x,y) = (x+y)\cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ $\quad ((x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$

1-6 0-t ad $\quad$ Sejtés $\lim = 0$

$(x_k, y_k) \longrightarrow (0,0)$ tetsz.

$|f(x_k, y_k)| = |x_k + y_k| \underbrace{\left|\sin(\ldots)\right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left|\cos(\ldots)\right|}_{\leq 1} \leq |x_k + y_k| \to 0$

$\xRightarrow{\text{átviteli elv}}$ $\exists$ h.é. $\underline{\underline{=0}}$

Megj.: Bizonyos esetekben jól jöhet:

$(x_k, y_k) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ $\quad$ (polárkoordináták)

$\quad\;\; \|$ $\quad\quad\quad r \geq 0 \quad \varphi_k \in [0, 2\pi[$

$(r_k \cos(\varphi_k), r_k \sin(\varphi_k))$

$(x_k, y_k) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow r_k \to 0$

Anal ea

2022.04.06

4

Pl $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ $(\ldots)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to\infty} 0$$

$$\|$$

$$(r_\varepsilon \cos(\varphi_\varepsilon),\ r_\varepsilon \sin(\varphi_\varepsilon)) \qquad (r_\varepsilon \to 0) \qquad r_\varepsilon = \sqrt{x_\varepsilon^2 + y_\varepsilon^2}$$

$$|f(x_\varepsilon, y_\varepsilon)| = \left| \frac{\cancel{r_\varepsilon^2} \cos^2(\varphi_\varepsilon)\cdot r_\varepsilon \cdot \sin(\varphi_\varepsilon)}{\cancel{r_\varepsilon^2}} \right| \leq r_\varepsilon \to 0$$

Tétel Ha $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folyt. és $K \subseteq D_f$ kompakt $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{f\langle K\rangle}_{\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in K\}} \subseteq \mathbb{R} \text{ kompakt}$$

Biz $\emptyset$

Tétel (W) Ha $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folyt. $K \subseteq D_f$ kompakt $\Rightarrow$

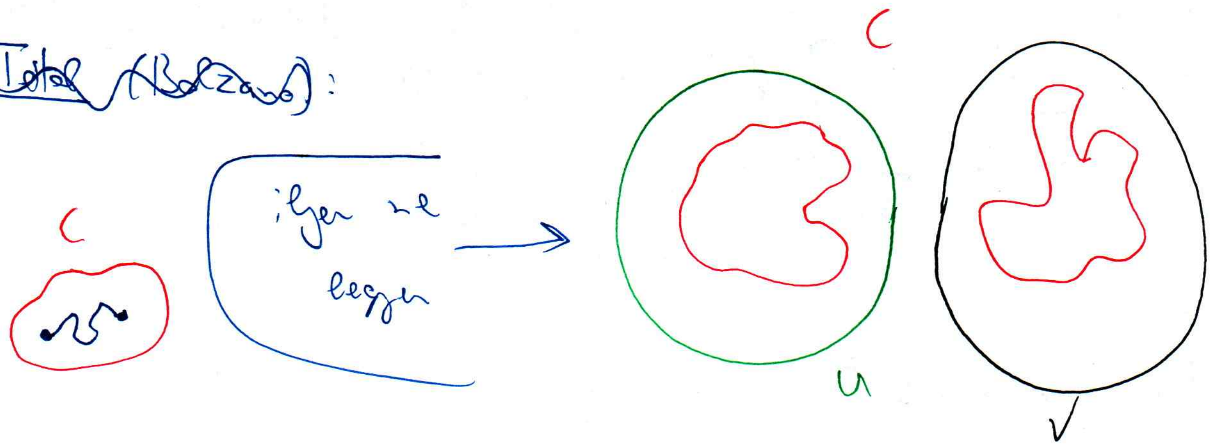
$\Rightarrow \exists\ \underline{x}_-, \underline{x}_+ \in K$, hogy

$$f(\underline{x}_-) = \inf_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) \qquad f(\underline{x}_+) = \sup_{\underline{x}\in K} f(\underline{x})$$

Biz [...]

Def Azt mondjuk, hogy a $C\subseteq\mathbb{R}^n$ halmaz összefüggő, ha $\nexists$ $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, hogy $U\cap V=\emptyset$, $U\cap C\neq\emptyset$, $V\cap C\neq\emptyset$ és $C\subseteq U\cup V$.

~~Tétel (Bolzano)~~:



Tétel (Bolzano) Ha $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ folytonos és $C\subseteq D_{om}(f)$ összefüggő, akkor $f\langle C\rangle$ is összefüggő.

Biz $\emptyset$

Kör.: Ha $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ folytonos és $C\subseteq D_{om}(f)$ összefüggő.

Ha $x,y\in C$ és $f(x)<f(y) \Rightarrow \forall f(x)<t<f(y) \Rightarrow$

$\forall f(x)<t<f(y)$ esetén $\exists z\in C$, hogy $f(z)=t$

Biz: $f\langle C\rangle\subseteq\mathbb{R}$ összefüggő. indirekt: tfh. $\nexists z\in C$, hogy $f(z)=t \Rightarrow$

$\Rightarrow f\langle C\rangle\subseteq\,]-\infty,t[\,\cup\,]t,+\infty[\; \Rightarrow f\langle C\rangle$ nem öf ↯ □

Többváltozós fv.-ek deriválása

Parciális deriváltak

def Legyen $f: \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ és $a \in Dom(f)$. Ha az $\mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$;

$x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ fv. diffható az a_i pontban, akkor azt mondjuk, hogy f <u>i-edik változója szerint</u> ~~parc~~ <u>parciálisan deriválható az a pontban</u>, és a fenti fv. a_i-beli deriváltját az <u>f fv. i-edik változó szerinti parciális deriváltjának</u> nevezzük <u>a-ban</u> és $\partial_i f(a)$-val jelöljük.

(egyéb jelölések: $\frac{\partial}{\partial a_i} f(a)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$, $f'_{x_i}(a)$)

pl 1) $f(x,y,z) = \frac{x z^3}{y}$ (...)

$\partial_1 f(x,y,z) = \frac{z^3}{y}$ $\quad$ $\partial_2 f(x,y,z) = -\frac{x z^3}{y^2}$

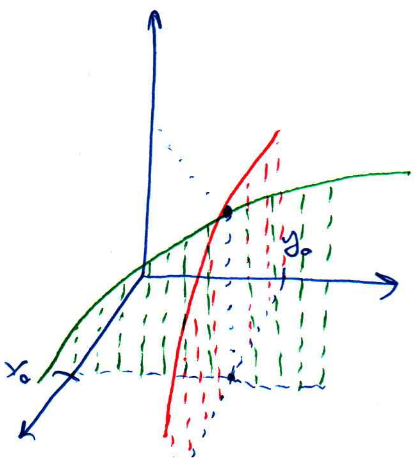
$\partial_3 f(x,y,z) = \frac{2xz}{y}$

2) $f(x,y) = 3x^2 \cos(4y)$ (...)

$\partial_1 f(x,y) = 6x\cos(4y)$ $\quad$ $\partial_2 f(x,y) = -12x^2 \sin(4y)$

Megj.

1, geometriai tartalom $\quad$ $f: \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$



A koordinátasíkokkal $\parallel$ síkmetszetekben a függvénygrafikon meredeksége a fv. grafikon meredeksége (a adott pontban)

1. változó szerint: (x)

2. változó szerint: (y)

Anal en

2022.04.11
2

2, Ha $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ és $\partial_i f(\underline{a})\ \exists$ $(\underline{a}\in\mathbb{R}^n)$

$$\partial_i f(\underline{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\underline{a})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{a} + t e_i) - f(\underline{a})}{t}$$

3, A pontbeli parciális deriváltak létezéséből még a pontbeli folytonosság sem következik, pl

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x=0 \text{ v. } y=0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Jelölés Ha $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ fv. és $i\in\{1,\dots,n\}$, akkor $\partial_i f$ jelöli azt az

$$\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto \partial_i f(\underline{x})$$

függvényt, melyre $\mathrm{Dom}(\partial_i f) = \{\underline{x}\in \mathrm{Dom}(f) : \partial_i f(\underline{x})\ \exists\}$

Totális derivált

Def Azt mondjuk, hogy az $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ (totálisan) diffható az $\underline{a}\in\mathbb{R}^n$ pontban, ha $\underline{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek és $\exists\ \underline{A}\in\mathbb{R}^n$, hogy

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x}-\underline{a}\rangle}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} = 0$$ és ekkor $\underline{A}$-t az f fv. $\underline{a}$-beli (totális) deriváltjának nevezzük. Jel.: $f'(\underline{a})$, grad $f(\underline{a})$, $Df(\underline{a})$

Megj.

1, Belátható, hogy az előbbi def.-ban $\underline{A}$ egyértelmű
(jelöléssel nem vezettük félre)

2, Geometriai tartalom $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + A_1(x_1-a_1) + A_2(x_2-a_2)$$

$\uparrow$

$\underline{a}$-hoz közeli $\underline{x}$-ekre

fv. grafikonja az $\underline{a}$ „közelében" egy síkkal közelíthető

Tétel Ha $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (totálisan) diffható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor

1, f folytonos $\underline{a}$-ban

2, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ esetén $\exists\ \partial_i f(\underline{a})$ és
$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \left(\partial_1 f(\underline{a}), \partial_2 f(\underline{a}), \dots, \partial_n f(\underline{a})\right)$$

Biz. $\underline{A} := \operatorname{grad} f(\underline{a})$

1, f (totálisan) diffható $\underline{a}$-ban $\Rightarrow$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x}-\underline{a}\rangle}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} = 0$$

$\varepsilon = 1$-hez $\exists\ \delta > 0$, hogy $0 < \|\underline{x}-\underline{a}\| < \delta$ esetén

$$\left|\frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x}-\underline{a}\rangle}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\right| < 1 \iff |f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x}-\underline{a}\rangle| < \|\underline{x}-\underline{a}\|$$

Cauchy-Sch.

$$|f(x)-f(a)| \overset{\Delta}{\leq} |f(\underline{x})-f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x}-\underline{a}\rangle| + |\langle \underline{A}, \underline{x}-\underline{a}\rangle| \leq$$

$$\leq \|\underline{x}-\underline{a}\| + \|\underline{A}\| \cdot \|\underline{x}-\underline{a}\| = \|\underline{x}-\underline{a}\|(1+\|\underline{A}\|) \xrightarrow{\underline{x}\to\underline{a}} 0$$

[?]

átviteli elv $\Longrightarrow$ f folytonos $\underline{a}$-ban

2, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0,\ 0 < \|\underline{x}-\underline{a}\| < \delta$

$$\left| \frac{f(\underline{x})-f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x}-\underline{a}\rangle}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} \right| < \varepsilon$$

$x := \underline{a} + t e_i$, ahol $\underline{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \leftarrow i$ $\quad i \in \{1,\dots,n\}$

$0 < |t| < \delta$ $\quad [\underline{x}-\underline{a} = t\underline{e}_i;\ 0 < \|\underline{x}-\underline{a}\| < \delta]$

[...] [?]

<u>Megj</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffható $a \in \mathbb{R}$-ben

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| = 0$$

Tétel Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv. és $a \in \mathrm{Dom}(f)$

- $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{int}(\mathrm{Dom}(\partial_i f))$
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\partial_i f$ folyt. a-ban

$\Rightarrow$ f (totálisan) diffható a-ban

Biz $\emptyset$

Pl

①
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f totálisan diffható-e $(0,0)$-ban?

Nem, mert f nem folytonos $(0,0)$-ban

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 \quad ↯$$

nem folytonos
nem tot. diffható

② $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

Hol diffható (tot) az f?

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\dots)$$

$(0,0) \neq (x_0, y_0)$ egy környezetében léteznek és folytonosak a parciális deriváltak $\xRightarrow[\text{T}]{\text{előző}}$ tot. diffh. (x_0, y_0)-ban.

◁

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (...)

$$\partial_1 f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \partial_2 f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (...)$$

~~Mert~~ $(x_0,y_0)\neq(0,0) \Rightarrow$ van olyan környezete, ahol a ~~pont~~ ~~deriváltat~~ parciális deriváltak léteznek és folytonosak

$\Rightarrow f$ (totálisan) diffható (x_0,y_0)-ban

$$\partial_1 f(0,0)=\lim \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} \ \nexists$$

$\Rightarrow \partial_1 f(0,0) \ \nexists$

$\Rightarrow f$ nem diffható a $(0,0)$-ban

3) $$f(x,y):=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Biz be, a, $(0,0)$-ban nem folytonosak a parc deriváltak

b, f diffható $(0,0)$-ban

$$\partial_1 f(x,y)=2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)2x\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\partial_1 f\left(\frac{1}{2k\pi}, 0\right) = \frac{1}{k\pi} \underbrace{\sin(2k\pi)}_{0} - \underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} = -1 \not\to 0$$

(Hasonlóan $\partial_1 f$ sem folytonos 0-ban)

---

b, definíció segítségével

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{0} - \langle \overbrace{\partial_1 f(0,0)}^{0}, \overbrace{\partial_2 f(0,0)}^{0}, (x,y)-(0,0) \rangle}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{\text{korl.}} = 0$$

$\Rightarrow f$ diffható ~~~~ (totálisan) $(0,0)$-ban

Érintősík: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (tot.) diffható (x_0,y_0)-ban $\Rightarrow$

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_0,y_0) + \partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{sík egyenlete}}$$

Anal ca

2022.04.13
2

def Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható (x_0, y_0)-ban

A $\partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$

egyenlettel meghatározott síkot az f fv. (x_0,y_0)-beli érintősíkjának nevezzük

Megj. a fenti sík

egy normálvektora: $(\partial_1 f(x_0,y_0), \partial_2 f(x_0,y_0), -1)$

egy pontja: $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

pl $f(x,y) = y^{2x}$ $(\ldots)$ $(y>0)$

• Számítsuk ki a $p_0 = (-1,1)$-beli érintősíkját (ha $\exists$)

$$\partial_1 f(x,y) = 2y^{2x} \ln(y)$$

$$\partial_2 f(x,y) = 2x y^{2x-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-1,1)$ egy környezetében $\exists$ parc. der.

$\Rightarrow f$ diffható $(-1,1)$-ben és

$$\operatorname{grad} f(a) = (\partial_1 f(-1,1), \partial_2 f(-1,1)) = (0,-2)$$

érintősík: normálvektor $(0,-2,-1)$

egy pontja $(-1, 1, 1)$

egyenlet: $\boxed{-2\cancel{x}y - z = -3}$

Iránymenti derivált

<u>Def</u> Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{e}\| = 1$

$\underline{a} \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$. Azt mondjuk, hogy az f fv. az $\underline{e}$ irány mentén deriválható az $\underline{a}$ pontban, ha a

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}$$

határérték $\exists$. Ekkor ezt a határértéket az f fv. $\underline{a}$ pontbeli $\underline{e}$ ~~irányú~~ irány menti deriváltjának nevezzük.

<u>Jelölések</u> $\boxed{D_{\underline{e}} f(\underline{a})}$, $\dfrac{\partial f(\underline{a})}{\partial \underline{e}}$, $\dfrac{d f(\underline{a})}{d \underline{e}}$

<u>Állítás</u> Ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (tot.) deriválható az $\underline{a} \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$ pontban, akkor $\forall \underline{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{e}\| = 1$ esetén

$$D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{e} \rangle$$

<u>Biz</u> Legyen $\varepsilon > 0$, f tot. der. $\underline{a}$-ban $\Rightarrow \exists \delta > 0$

$0 < \|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$

$$\left| \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} \right|$$

Anal ea

2022.04.13
3

Legyen $0 < t < \delta$

$\underline{x} := \underline{a} + t\underline{e}$ $\quad \underline{x} - \underline{a} = t\underline{e}$ $\quad \|\underline{x} - \underline{a}\| = t < \delta$

$$\left| \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a}) - \langle \text{grad } f(\underline{a}), t\underline{e} \rangle}{t} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} - \langle \text{grad } f(\underline{a}), \underline{e} \rangle \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{t \to 0+} \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}}_{D_{\underline{e}} f(\underline{a})} = \langle \text{grad } f(\underline{a}), \underline{e} \rangle$$

$\square$

Áll Ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tot. der. $\underline{a}$-ban $\Rightarrow \forall \underline{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{e}\| = 1$ esetén

$-\|\text{grad } f(\underline{a})\| \le D_{\underline{e}} f(\underline{a}) \le \|\text{grad } f(\underline{a})\|$ $\qquad$ Biz [...]

Megj ① $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható $\underline{a}$-ban, $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{e}\| = 1$

$\alpha :=$ grad $f(\underline{a})$ és $\underline{e}$ szöge

$D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = \langle \text{grad } f(\underline{a}), \underline{e} \rangle = \|\text{grad } f(\underline{a})\| \cdot \cos(\alpha)$

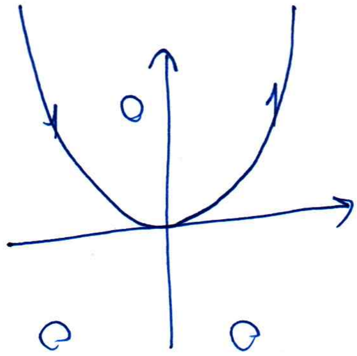
$D_{\underline{e}} f(\underline{a})$ maximális $\iff \alpha = 0$ $\quad (\underline{e} \uparrow\uparrow \text{grad } f(\underline{a}))$

[...]

- grad $f(x_0, y_0)$ a „legnagyobb növekedés" irányában mutat
- grad $f(x_0, y_0)$ merőleges a szintvonalra

② Az iránymenti deriváltak létezéséből még a folytonosság sem következik

Pe $f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ ha } y = x^2 \text{ és } x \neq 0 \\ 0, \text{ else} \end{cases}$



$\underline{e} \in \mathbb{R}^2, \ \|\underline{e}\| = 1$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{0} + t\underline{e}) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(\underline{0})}}}{t} = 0$$ és f nem folytonos $(0,0)$-ban

---

Pe $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

$\underline{a} = (3,1) \quad \|\underline{e}\| = 1$

$\underline{e} \uparrow\uparrow (1,2)$

a, $D_{\underline{e}} f(\underline{a}) = ?$

b, Milyen $\underline{\tilde{e}}$ irány mentén maximális $D_{\underline{\tilde{e}}} f(\underline{a})$

a, $\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1,2)$

$\partial_1 f(x,y) = 2x - y \qquad \partial_2 f(x,y) = 2y - x$

$\partial_1 f(\cancel{x,y})$ és $\partial_2 f$ folytonos $\Rightarrow \exists \operatorname{grad} f(3,1)$

$\operatorname{grad} f(3,1) = (5,-1)$

$\Rightarrow D_e f(a) = \langle \operatorname{grad} f(3,1), \underline{e} \rangle = \langle (5,-1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \rangle =$

$= \frac{3}{\sqrt{5}}$

b, $\operatorname{grad} f(\underline{a})$ irányába maximális, azaz

$$\underline{\tilde{e}} = \frac{\operatorname{grad} f(\underline{a})}{\|\operatorname{grad} f(\underline{a})\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(5,-1)$$

Lokális szélsőérték def Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv. Az $a \in Dom(f)$ pontban f-nek ~~szél~~ lokális ~~szélsőértéke van~~ maximuma ~~van~~ (ill. minimuma) van, ha $\exists\, r>0$, hogy $\forall \underline{x} \in B_r(\underline{a}) \cap Dom(f)$ $\quad f(\underline{x}) \leq f(\underline{a})$ (illetve $f(\underline{x}) \geq f(\underline{a})$).

Azt mondjuk, hogy f-nek lokális szélsőértéke van az $\underline{a} \in Dom(f)$ pontban, ha f-nek itt lok. min vagy lok. max. van.

Tétel (szükséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére)

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv. tfh. f diffható az $\underline{a} \in int(Dom(f))$ pontban. Ha f-nek lok. sz.é-e van $\Rightarrow grad(f(\underline{a})) = \underline{0}$
(azaz STACIONÁRIUS PONTJA f-nek)

Biz Legyen $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv.

$$Dom(\varphi) := \{t \in \mathbb{R} \mid \underline{a} + t\underline{e}_i \in Dom\, f\}, \quad \varphi(t) := f(\underline{a} + t\underline{e}_i)$$

$$\left[\, i \quad \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i. \,\right]$$

$\Rightarrow$ ~~Ahol~~ φ-nek lokális sz.é.-e van 0-ban és diffható 0-ban $\Rightarrow 0 = \varphi'(0) = \partial_i f(\underline{a})$

$$\overset{?}{\underset{?}{\Rightarrow}} \; grad\, f(\underline{a}) = \left(\partial_1 f(\underline{a}), \partial_2 f(\underline{a}) \ldots, \partial_n f(\underline{a})\right) = \underline{0}$$

Jel Ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv. és $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ akkor $\partial_{i,j} f$ jelölje a $\partial_i(\partial_j f)$ függvényt. (elnevezés: f másodfokú parciális deriváltja)

Pl $f(x,y) = e^{2x}\cos(3y) + x^2 - y^3$

Határozzuk meg f másodrendű parciális deriváltjait!

$\partial_1 f(x,y) = 2e^{2x}\cos(3y)+2x$

$\partial_2 f(x,y) = -3e^{2x}\sin(3y)-3y^2$

$\partial_{11} f(x,y) = 4e^{2x}\cos(3y)+2$

$\partial_{21} f(x,y) = -6x^{2x}\sin(3y)$

$\partial_{12} f(x,y) = -6x^{2x}\sin(3y)$

$\partial_{22} f(x,y) = -9e^{2x}\cos(3y)-6y$

Tétel (Young-tétel) Legyen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fv.
$a \in \mathbb{R}^n$. Ha $\forall\ i,j \in \{1,\dots,n\}$ esetén $a \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}(\partial_{ij} f))$
és $\partial_{ij} f$ folyt. a-ban $\Rightarrow \forall\ i,j \in \{1,\dots,n\}$

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a)$$

Biz ~~Ø~~

Egy kis lineáris algebra

def Az $\forall\ A := (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mx. szimmetrikus
$\forall\ i,j \in \{1,\dots,n\}$ $a_{ij} = a_{ji}$

def Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix

- POZITÍV DEFINIT, ha $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $\langle x, Ax\rangle > 0$
- NEGATÍV DEFINIT, ha $\forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $\langle x, Ax\rangle < 0$
- POZITÍV SZEMIDEFINIT, ha $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle x, Ax\rangle \geq 0$
- NEGATÍV SZEMIDEFINIT, ha $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle x, Ax\rangle \leq 0$
- INDEFINIT, ha nem szemidefinit

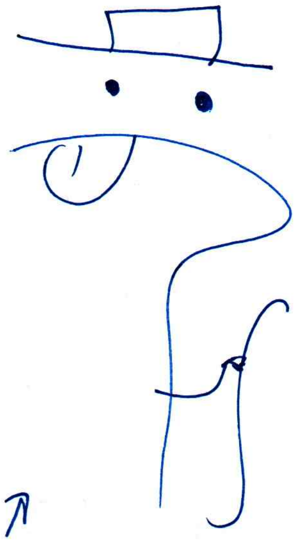
Anal ea

2022.04.25
2

Tétel Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus. Ekkor

- A poz. def. $\Leftrightarrow$ A $\forall$ sajátértéke pozitív
- A neg. def. $\Leftrightarrow$ — " — neg.
- A poz. szd. $\Leftrightarrow$ — " — ≥ 0
- A neg. szd $\Leftrightarrow$ — " — ≤ 0
- A ind. $\Leftrightarrow$ A-nak $\exists$ poz és neg s.é.

Biz: $[?][\ldots][?\emptyset?]$



vétemény

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} N(E) = 0}$$

Tétel Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mx

demokratikus koalíció vagy ℓ-adik FŐMINOR

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad D_\ell = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & a_{\ell\ell} \end{pmatrix}$$

$\ell \in \{1, \ldots, n\}$

Ekkor:

- A poz. def. $\Leftrightarrow$ $\forall \ell \in \{1 \ldots n\}$ $D_\ell > 0$
- A neg. def. $\Leftrightarrow$ $\forall \ell \in \{1 \ldots n\}$ $(-1)^\ell D_\ell > 0$
- A poz. szdef $\Leftrightarrow$ $\forall \ell \in \{1 \ldots n\}$ $D_\ell \geq 0$
- A neg. szdef $\Leftrightarrow$ $\forall \ell \in \{1 \ldots n\}$ $(-1)^\ell D_\ell \geq 0$

Biz: $\emptyset$

Megj.: ① diagonális mx. esetén

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

② 3-4 pontban $\not\Leftarrow$, pl.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D_1 = 0, \; D_2 = 0, \; D_3 = 0 \text{ és } A \text{ indefinit}$$

def Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fv. $a \in \mathrm{Dom}(f)$ és $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ $a \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}(\partial_{ij} f))$ illetve $\partial_{ij} f$ folytonos a-ban. Ekkor a

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{21} f(a) & \dots & \\ \partial_{12} f(a) & \cdot & & \cdot \\ \vdots & & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & - & \partial_{nn} f(a) \end{pmatrix}$$

(Young-tétel miatt szimmetrikus) mátrixot f a-pontbeli HESSE-MÁTRIXÁNAK nevezzük

Tétel Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Dom}(f)$ és tfh. $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ a $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}(\partial_{ij} f))$ és $\partial_{ij} f$ folytonos a-ban. Ekkor

- Ha $\mathrm{grad} f(a) = 0$ és $H_f(a)$ poz. def. $\Rightarrow$ f-nek lok. min. a-ban
- Ha $\mathrm{grad} f(a) = 0$ és $H_f(a)$ neg. def. $\Rightarrow$ f lok. min. a
- Ha ~~grad f(a) = 0~~ – ~ indef. $\Rightarrow$ $\not\exists$ szé.

Anal ea

2022.04.25
3

Pél $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3x-3y-3z+1$

Hol van f lok. szé?

$\partial_1 f(x,y,z) = 3x^2-3$

$\partial_2 f(x,y,z) = 3y^2-3$

$\partial_3 f(x,y,z) = 3z^2-3$

Pél $f(x,y) = x^2+y^2+2x-2y-2xy+1$

Sz.é?

$$\left.\begin{array}{l}\partial_1 f(x,y) = 2x+2-2y = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 2y-2-2x = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow y = x+1$$

itt lehet sz.é.

másodrendű pdf.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad D_1 = 2 \quad D_2 = 0 \Rightarrow ?$$

sajátértékek: 0,4 → szemidefinit ⇒ ?

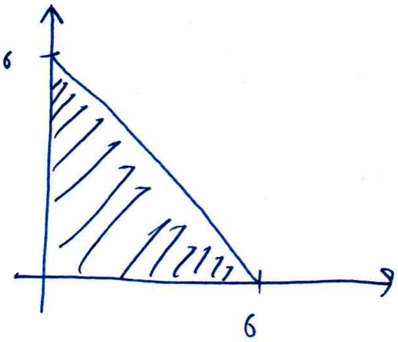
⇓

előző tétel ∅ alkalmazható

Anal ea $\qquad\qquad$ 2022.04.24

$$f(x,y) := x^2 y(2-x-y) \qquad (\ldots)$$

$$T := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0\ \ x+y\leq 6$$



Határozzuk meg f szélsőértékeit és ezek helyét (ha $\exists$)!

T kompakt (azaz korlátos és zárt)

f folytonos $\overset{\text{Weierstrass}}{\underset{\text{tétel}}{\Longrightarrow}}$ f-nek létezik minimuma és maximuma T-n

Hol lehet szélsőértéke f-nek T-n

- T azon belső pontjaiban, ahol f nem diffható
- T azon belső pontjaiban, ahol f diffható és gradiens 0.
- T határpontjaiban

---

f T $\forall$ belső pontjában diffható.

$$f(x,y) = 2x^2y - x^3y - x^2y^2 \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

$$\partial_1 f(x,y) = 4xy - 3x^2y - 2xy^2, \quad \partial_2 f(x,y) = 2x^2 - x^3 - 2x^2y$$

$\Rightarrow$ $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos $\mathbb{R}^2$-en $\Rightarrow$ f diffható $\mathbb{R}^2$-n

<u>belső pontok</u>

$$\left.\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) = 0 &\iff xy(4-3x-2y) = 0 \overset{\text{belső pont}}{\iff} 4-3x-2y=0\\ \partial_2 f(x,y) = 0 &\iff x^2(2-x-2y) = 0 \iff 2-x-2y=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}x&=1\\ y&=\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{jelölt} \quad (1,\tfrac{1}{2}) \qquad f(1,\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}$$

Határpontok $\boxed{f(x,0)=0 \checkmark}$

$\boxed{f(0,y)=0 \checkmark}$

$g(x) := f(x,6-x) = x^2(6-x)(2-6) = 4x^3 - 24x^2 \qquad x\in[0,6]$

g szélsőértékei $[0,6]$-on

$g(0) = 0 = g(6) \qquad g'(x) = 12x^2 - 48x = 0 \iff x=0 \text{ v. } x=4$

$\boxed{f(4,2) = g(4) = -128}$

$\rightarrow$ min. $f = -128 \qquad$ max $f = \frac{1}{4}$

helye: $(4,2) \qquad$ helye $(1,\frac{1}{2})$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények

Folytonosság, határérték: hasonlóan definiálható mint az $m=1$ esetben, $|\cdot|$ helyett $\|\cdot\|$-t kell írni

Tétel Legyen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fv. $f=(f_1,f_2,f_3,\dots,f_m)$, f folytonos $a\in Dom(f)$-ban $\iff \forall i\in\{1,\dots,m\}$, f_i folytonos a-ban

Differenciálhatóság def: Legyen $f=(f_1,f_2,\dots,f_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ fv. Azt mondjuk, hogy f differenciálható a-ban, ha $a\in Int(Dom(f))$ és $\exists A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, hogy

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{\|f(\underline{x})-f(\underline{a})-A(\underline{x}-\underline{a})\|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} = 0$$

és A-t az f a-pontbeli deriváltjának nevezzük és $f'(a)$-val jelöljük.

Tétel Legyen $f=(f_1,f_2,\dots,f_m):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fv.

Ha f diffható az $\underline{a}\in\mathbb{R}^n$ pontban, akkor $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $\forall j\in\{1,\dots,m\}$ $\partial_i f_j(a)\ \exists$

$$\text{és}\quad f'(a)=\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\underline{a}) & \partial_2 f_1(\underline{a}) & \dots & \vdots \\ \partial_1 f_2(\underline{a}) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ \partial_1 f_m(a) & \dots & & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

f JACOBI-MÁTRIXA a-ban

Biz $\emptyset$

Pl $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} xe^z y^2 \\ \hline y\sin(z)\end{pmatrix}$ $\quad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$

nem törtvonal

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$f'(x,y,z)=\begin{pmatrix} e^z & 2y & xe^z \\ 0 & \sin(z) & y\cos(z)\end{pmatrix}$$

Tétel Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $f=(f_1,\dots,f_m)$

Ha $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ és $\forall j\in\{1,\dots,m\}$ $a\in\operatorname{int}(\operatorname{Dom}(\partial_i f_j))$ és $\partial_i f_j$ folyt. a-ban $\Rightarrow$ f diffható a-ban

Biz $\emptyset$

Tétel Legyenek $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Ha g diffható $\underline{a}$-ban és f diffható $g(\underline{a})$-ban, akkor $f \circ g$ diffható $\underline{a}$-ban, ~~akkor~~ $f \circ g$ és

$$(f \circ g)'(\underline{a}) = f'(g(\underline{a})) \cdot g'(\underline{a}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

Biz $\emptyset$

Pél $f(t) := \begin{pmatrix} t^2 - t \\ \frac{1}{1+t^2} \\ e^t \end{pmatrix}$ $\quad g(x,y,z) = x^2 y - z$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\quad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)'(1) = ?$ $\quad (f \circ g)'(1,1,1) = ?$

$f'(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ e^t \end{pmatrix}$ $\quad g'(x,y,z) = (2xy, \ x^2, \ -1)$

— , —

$$(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(0, \tfrac{1}{2}, e) = (0, 0, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ e \end{pmatrix} = -e$$

$f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ e \end{pmatrix}$ $\quad f'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ e \end{pmatrix}$

— , —

$$(f \circ g)'(1,1,1) = f'(g(1,1,1)) \cdot g'(1,1,1) =$$

$$= f'(0) \cdot g'(1,1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Anal ea

2022.04.27
3

~~Megj~~ Legyen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv.

Tfh. $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $\partial_{ij} f$ folytonosak az $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon $\Rightarrow \partial_j f$ diffható Ω-n $\forall j \in \{1,\dots,n\}$

(~~mint a parc. der.~~) (mert a parc. der. folyt.)

$\Rightarrow \partial_j f$ folytonos Ω-n $\forall j \in \{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow f$ diffható Ω-n

$$g(\underline{x}) := f'(x) = (\partial_1 f(\underline{x}), \dots, \partial_n f(\underline{x})) \quad (\forall x \in \Omega)$$

$$\partial_i g_j = \partial_i \partial_j f = \partial_{ij} f \quad \text{folytonosak } \Omega$$

$\Rightarrow g$ diffható Ω $\forall$ pontjában és

$$f''(x) = (f')'(\underline{x}) = g'(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(\underline{x}) & \dots & \partial_n g_1(\underline{x}) \\ \partial_1 g_2(\underline{x}) & \dots & \partial_n g_2(\underline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n(\underline{x}) & \dots & \partial_n g_n(\underline{x}) \end{pmatrix} = H_f(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega)$$

Anal ea

2022.05.02
1

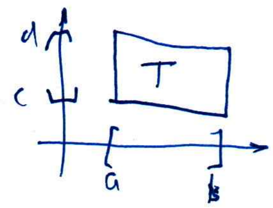
Többváltozós fv.-ek integrálása

Alapfogalmak (egyváltozós eset)

def Legyen $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a<b$, $c<d$. Ekkor

$T := [a,b]\times[c,d] := \{(x,y)\in\mathbb{R} : x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$

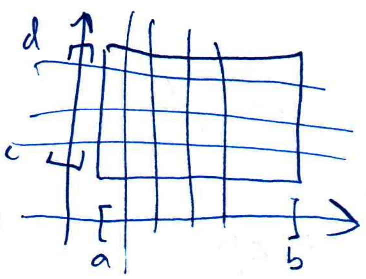
halmazt téglának nevezzük



def Legyen $T := [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ tégla, $p,q\in\mathbb{N}^+$

ill. $a=:x_0<x_1<x_2<\ldots<x_p=:b$

$c=:y_0<y_1<y_2<\ldots<y_q=:d$



Ekkor az $F := \{(x_i,y_j) : i\in\{0,\ldots,p\},\ j\in\{0,\ldots,q\}\}$ halmazt a T egy felosztásának nevezzük

Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fv. amelyre $T\subseteq D_f$ és f korlátos T-n

$m_{ij} = \inf\{f(x,y) \mid (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}$

$M_{ij} = \sup$ ______ , ______

Az f fv. F felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege:

$$s_F(f) := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m_{ij}\,(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

Az f fv. F felosztáshoz tartozó <u>felső közelítő összege</u>

$$S_F(f) := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

<u>def</u> Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ korlátos a $T \subseteq D_f(f)$ téglán

$$\underline{\int_T} f := \sup\{ s_F(f) : F \text{ felosztása } T\text{-nek} \}$$

(Az f alsó integrálja T-n)

$$\overline{\int_T} f := \inf\{ S_F(f) : F \text{ felosztása } T\text{-nek} \}$$

(Az f felső integrálja T-n)

<u>def</u> Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ korlátos a T téglán.

Azt mondjuk, hogy az f fv. Riemann integrálható T-n, ha

$$\underline{\int_T} f = \overline{\int_T} f \text{. Ekkor a } \int_T f := \underline{\int_T} f = \overline{\int_T} f \in \mathbb{R}$$

számot f T-n vett integráljának nevezzük

<u>Tétel</u> Ha $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos és $T \subseteq D_f(f)$ tégla $\Rightarrow$ f (R-) integrálható T-n

<u>Biz</u> $\emptyset$

<u>Tétel</u> Legyen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fv.-ek $T \subseteq \mathbb{R}^2$-tégla, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- Ha f int.-ható T-n $\Rightarrow$ αf is és $\int_T \alpha f = \alpha \int_T f$
- Ha f és g int.ható T-n $\Rightarrow$ $f+g$ is és

$$\int_T f+g = \int_T f + \int_T g$$

- —"— és $f \leq g \Rightarrow \int_T f \leq \int_T g$

<u>def</u> Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A \subseteq Dom(f)$ és legyen T olyan tégla, amelyre $A \subseteq T$

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{ha } (x,y) \in A \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in T \setminus A \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy f Riemann-int.ható A-n, ha $\tilde{f}$ R-int.ható T-n és ekkor az

$$\int_A f := \int_T \tilde{f}$$

számot az f A-n vett integráljának nevezzük.

<u>def</u> (térfogata) Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ <u>Jordan-int.ható</u>, ha a konstans 1 fv. integrálható H-n, és ekkor

$$J(H) := \int_H 1_H \in \mathbb{R}_+$$

számot a <u>Jordan-mértékének</u> nevezzük.

Integrálás téglán és tartományon

FUBINI TÉTEL

Tétel Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ integrálható a $T\subseteq\mathbb{R}^2$ téglán $(T=[a,b]\times[c,d])$

Ha $\forall x\in[a,b]$

$y\mapsto f(x,y)$ fv. R-int.ható $[c,d]$-n, akkor

$x\mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$ fv. int.ható $[a,b]$-n és

$$\int_T f = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Megj: Ha az előző tételben f folytonos T-n, akkor a feltételek automatikusan teljesülnek, és

$$\int_T f = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

Pl (1) $f(x,y)=3xe^{-xy}$ $\quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$

$T:=[0,1]\times[1,2]$ $\qquad \int_T f = ?$

f folytonos T-n $\overset{F\text{-t}}{\Rightarrow}$

$$\int_T f = \int_1^2\left(\int_0^1 3xe^{-xy}\,dx\right)dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{parc. int}}}{=} \dots$$

Anal ea

$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_1^2 3e^{-xy} x \, dy\right) dx = \int_0^1 -3\left[e^{-xy}\right]_{y=1}^{2} dx =$$

$$= \int_0^1 -3e^{2x} + 3e^{-x} \, dx = \left[\frac{3}{2}e^{-2x} - 3e^{-x}\right]_{x=0}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}e^{-2} - 3e^{-1} - \frac{3}{2} + 3 = 3\left(\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2}\right)$$

② $T = [0,1] \times [-2,0]$

$f(x,y) = xy \cdot e^{3x+y^2}$ f folyt. T-n $\overset{\boxed{T}}{\Longrightarrow}$

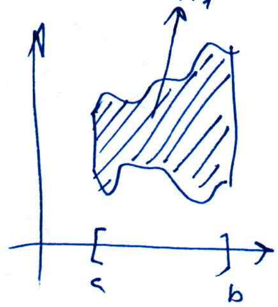
$$\int_0^1 \int_{-2}^0 xy\, e^{-3x+y^2} \, dy\, dx = \int_0^1 \int_{-2}^0 x e^{3x} \cdot y e^{y^2} \, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 x e^{3x} \int_{-2}^0 y e^{y^2} dy \, dx = \left(\int_{-2}^0 y\, e^{y^2} dy\right)\left(\int_0^1 x e^{3x} dx\right) = \text{HF}$$

<u>Tétel</u> (int. ...) Legyen $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos fv-ek, amelyekre $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \le h(x)$

$H_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \ \ g(x) \le y \le h(x)\}$

$H_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a,b] \ \ g(y) \le x \le h(y)\}$



Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos H_1-en $\to$ f int.ható H_1-en

és $\int_{H_1} f = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) \, dy\, dx$

Ha $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ folyt H_2-n ...

Biz:

Megj: A fenti H_1 (ill H_2) halmazt x (ill. y) tengelyre vonatkoztatott ______________ hal. nevezzük

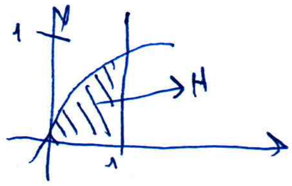
Pl $H :=$ 1. ?

az $x=0$ $y=2-x$ és $y=x^2$ egyenletű alakzatok korlátos...

$f(x,y) := 2xy \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$

$\int_H f = ?$?

2. $\int_0^1\int_{y^2}^1 y e^{-x^2}\,dx\,dy = ?$



$H = \{(x,y) : 0\le y\le 1,\ y^2\le x\le 1\}$

$\{(x,y) : 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le \sqrt{x}$

$\int_0^1\int_{y^2}^1 y e^{-x^2}\,dx\,dy = \int_H f = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} y e^{-x^2}\,dy\,dx =$

$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} e^{-x^2}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int_0^1 -2x\, e^{-x^2}\,dx =$

$= -\frac{1}{4}\left[e^{-x^2}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ ⇑ 2. ZH ⇑

Anal ea

→ ∅ Biz.

Megj Belátható, hogy ∀ normáltartomány Jordan-mérhető

Jel $\int_T f = \int_T f(x,y)\,d(x,y)$

Integráltranszformáció a síkon

Tétel Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $g: G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható (g diff.ható G ∀ pontjában és $\partial_i g_j$ folytonos $\forall i,j \in \{1,2\}$) és legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ olyan, hogy $\overline{H} \subseteq G$, H Jordan-mérhető, illetve tfh. g injektív $\operatorname{int}(H)$-n. Ha f folytonos $g\langle H\rangle$-n $\Rightarrow \int_{g\langle H\rangle} f(x,y)\,d(x,y) =$

$$= \int_H f(g(u,v)) \cdot \left|\det g'(u,v)\right| \cdot d(u,v)$$

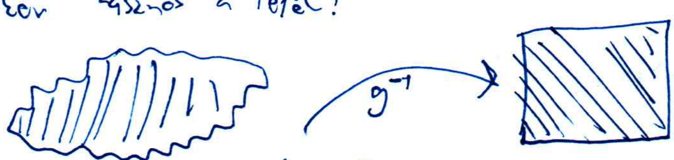
(abban az értelemben értendő, hogy ha az egyik oldal ∃, akkor a másik is, és ~~egyenlő~~ egyenlőek)

Biz ∅

Megj.:

- determináns = lineáris transzformáció térfogatnövelő faktora
- egyváltozóban: $$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

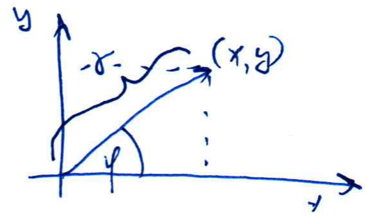
  itt irányított tartományon integrálunk
- mikor hasznos a tétel?



(brick)

ezen szeretnél integrálni

Polár koordináták



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$ ez a felírás egyértelmű, ha $(x,y) \neq \underline{0}$

$r \geq 0$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ha } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ha } y < 0 \end{cases}$$

Tétel (polártranszformáció) Legyen $A \subseteq [0,+\infty[\times [0,2\pi]$ Jordan-mérhető és

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ korlátos $P\langle A\rangle$ halmazon, akkor

$$\int_{P\langle A\rangle} f(x,y)\, d(x,y) = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\, d(r,\varphi)$$

Ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is, és egyenlőek

Biz P folyt. diff.ható $\mathbb{R}^2$-en, injektív $]0,+\infty[\times [0,2\pi[$-n

$$P'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2$

$$\det(P'(r,\varphi)) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

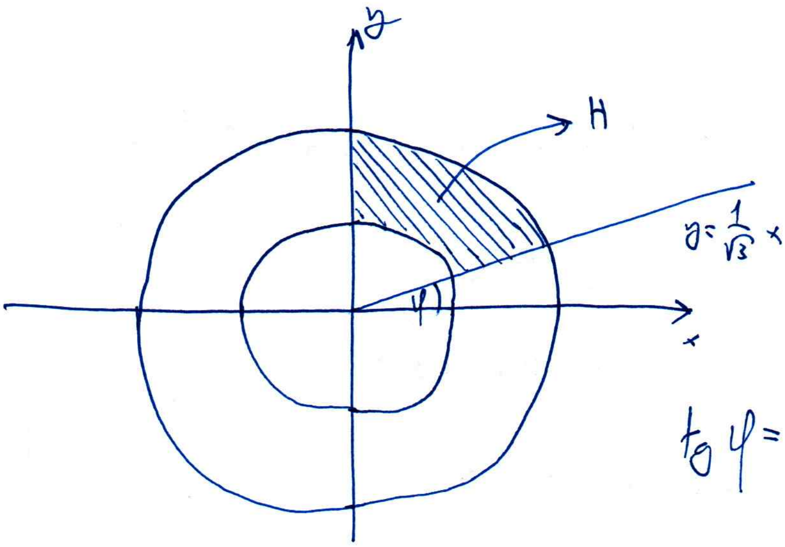
□

Anal ea

2022.05.04
2

Pe

$H := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge \frac{1}{\sqrt3}x\}$



$f(x,y)=4xy^3 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$

$\int_H f = ?$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt3} \qquad \varphi=\frac{\pi}{6}$

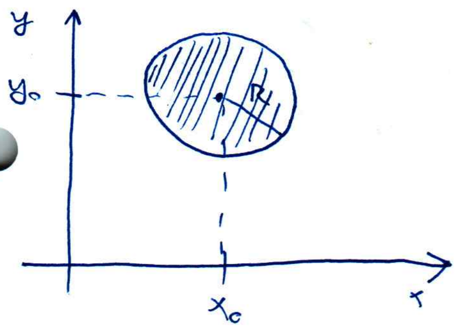
$$H=\left\{(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) : 1\le r\le 2,\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\} = P\left([1,2]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$\to \int_H f = \int_{[1,2]\times[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\, d(r,\varphi) = \int_1^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4r^4\cos(\varphi)\sin^3(\varphi)\, r\cdot d\varphi\, dr =$$

$$= \left(\int_1^2 r^5\, dr\right)\cdot\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi\cdot d\varphi\right) = \left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=1}^{2}\cdot\left[\sin^4\varphi\right]_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}=\text{hat}} =$$

$$= \frac{2^6-1}{6}\left(1-\frac{1}{2^4}\right)$$

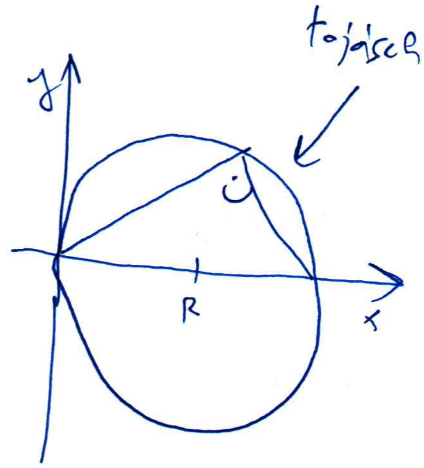
Általános közepű kör



$x = x_0 + r\cos\varphi \qquad 0\le r\le R$

$y = y_0 + r\sin\varphi \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$

Speciális leszeletű kör



1. lehetőség: mint előbb

$x_0 = R$

$y_0 = 0$

2. lehetőség: origó kp-ú polárkoord.

$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le r \le 2R\cos(\varphi)$

$$\Rightarrow \overline{B}_R((R,0)) = \left\{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi) : -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad 0 \le r \le 2R\cos(\varphi) \right\}$$

$$\Rightarrow \overline{B}_R((R,0)) = \underline{P}\langle H \rangle, \text{ ahol } H = \left\{ (r,\varphi) : -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2R\cos(\varphi) \right\}$$

Áll $\forall a \in \mathbb{R}^+ : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Biz $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx < +\infty$, mert $\int_{1}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \le \int_{1}^{+\infty} e^{-ax} dx < +\infty$

$\int_{-\infty}^{-1} e^{-ax^2} dx < +\infty$ hasonlóan

$\int_{-1}^{1} e^{-ax^2} dx < +\infty$ ✓

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-ax^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-ax^2} dx + \lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{0} e^{-ax^2} dx =$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} dx \leftarrow ?$$

$R>0$

$$\left(\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-R}^{R} e^{-ay^2}\,dy\right) =$$

$$= \int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-ax^2-ay^2}\,d(x,y) \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\int_{B_R(\underline{0})} e^{-ax^2-ay^2}\,d(x,y) = \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-ar^2}\cdot r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int_0^R 2\pi\, e^{-ar^2}\, r\,dr = 2\pi\left[\frac{e^{-ar^2}}{-2a}\right]_{r=0}^{R} = 2\pi\left(\frac{e^{-aR^2}}{-2a} - \frac{1}{-2a}\right) = \frac{\pi}{a}\left(1-e^{-aR^2}\right)$$

$$\left[-\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right]\times\left[-\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right] \subseteq B_R(\underline{0}) \subseteq [-R,R]\times[-R,R]$$

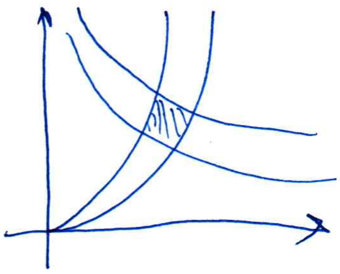
R-int $\Rightarrow$ monoton

$$\int_{(\dots)} e^{-ax^2-ay^2}\,d(x,y) \le \int_{B_R(\underline{0})} e^{-ax^2-ay^2}\,d(x,y) \le \int_{(\dots)} e^{-ax^2-ay^2}\,d(x,y)$$

$\vdots$

$\triangleleft$

$\boxed{\text{Pl}}$



H legyen az $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{4}{x}$

$y=x^2$, $y=2x^2$

által határolt korlátos tartomány

H területe?

H normált... $\Rightarrow$ Jordan-mérhető

$$J(H)=\int_H 1_H$$

$$H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le 2x^2,\ \frac{1}{x}\le y\le\frac{4}{x}\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 1\le\frac{y}{x^2}\le 2,\ 1\le xy\le 4\right\}$$

$$\varphi(x,y):=\left(\frac{y}{x^2},\ xy\right)\quad\left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$$

$$H=\varphi<[1,2]\times[1,4]>$$

$g:=\varphi^{-1}=?$ $\quad u=\frac{y}{x^2}$ $\quad v=xy\Rightarrow y=\frac{v}{x}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ u=\frac{v}{x^3}\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{\frac{v}{u}}=u^{-\frac13}\cdot v^{\frac13}$$

$$y=\frac{v}{x}=u^{\frac13}v^{\frac23}$$

?

$$\Rightarrow\ g(u,v)=\left(u^{-\frac13}v^{\frac13},\ u^{\frac13}v^{\frac23}\right)$$

$$g'(u,v)=\begin{pmatrix}-\frac13 u^{-\frac43}v^{\frac13} & \frac13 u^{-\frac13}v^{-\frac23}\\ \frac13 u^{-\frac23}u^{\frac23} & \frac23 u^{\frac13}v^{-\frac13}\end{pmatrix}\qquad \det\left(g'(u,v)\right)=-\frac13\cdot\frac1u=-\frac{1}{3u}$$

Anal ea

2022.05.05
1

$H \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad g\langle[1,2]\times[1,4]\rangle = H$

$\det g'(u,v) \left(= \frac{1}{3u}\right)$

$$J(H) = \int_H 1 = \int_{[1,2]\times[1,4]} \left|\det g'(u,v)\right| d(u,v) =$$

$$= \int_1^2\int_1^4 \frac{1}{3u}\,dv\,du = \int_1^2 3\cdot\frac{1}{3u}\,du = \left[\ln|u|\right]_{u=1}^2 = \ln 2$$

$\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{fv.-ek integrálja}}$

Hasonlóan vezetjük le, mint az $n=2$ esetben - csak a fontosabb tételek, def.-ek kimondása következik

def A $T \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt téglának nevezzük, ha $\exists\, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ hogy $a_i < b_i$ ($\forall i \ldots$)

$$T = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n] =: \prod_{i=1}^n [a_i,b_i]$$

Tétel Legyen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ tégla

$T := \prod_{i=1}^n [a_i,b_i]$ és tfh $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ int-ható T-n.

Ha a $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$ int.ható

$[a_n, b_n]$-en $\forall x_i \in [a_i, b_i]$ $(i \in \{1, \ldots, n-1\})$, akkor az

$\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $(x_1,\dots,x_{n-1}) \longmapsto \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_{n-1},t)\,dt$ fv.

integrálható a $T' := \prod_{j=1}^{n-1} [a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ téglán és

$$\int_T f = \int_{T'} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_{n-1},t)\,dt\; d(x_1,\dots,x_{n-1})$$

Biz $\emptyset$

M. Ha ~~az~~ f folyt akkor a tétel feltétele teljesül és

a tétel $n-1$-szeri alkalmazásával

$$\int_T f = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\dots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_n \dots dx_2\,dx_1$$

def • A $H \subseteq \mathbb{R}$ 1-dimenziós normáltartomány, ha kompakt intervallum

• $(n \geq 2)$ A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz n-dimenziós normáltartomány, ha

$\exists H' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ $n-1$-dimenziós normáltartomány, ill. $g, h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ fv-ek,

hogy $\forall x \in H' : g(x) \leq h(x)$ és $H = \{(x,t) \in H' \times \mathbb{R} \mid g(x) \leq t \leq h(x)\}$

Tétel Legyen $(n \geq 2)$ $H \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $H' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ $n-1$ dim

normált., hogy $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ folyt $\forall x \in H'$ $g(x) \leq h(x)$ és

$$H := \{(x,t) \in H' \times \mathbb{R} \mid g(x) \leq t \leq h(x)\}$$

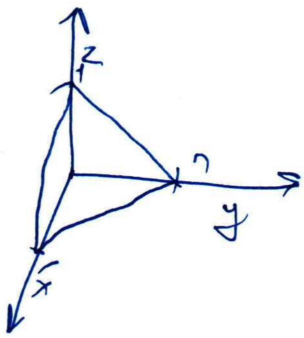
Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folyt. H-n, akkor int-ható H-n és

$$\int_H f = \int_{H'} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\,dt\,dx$$

Anal ea

2022.05.09
2

Pl $H := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\ x+y+z\le 1\}$



$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ folyt.

$H = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}$

$$\Rightarrow \int_H f = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

def Azt mondjuk, hogy a $H\subseteq\mathbb{R}^n$ korlátos halmaz Jordan-mérhető, ha a H-n értelmezett konstans 1 fv. integrálható H-n.

Ekkor $J(H) := \int_H 1_H$ -t a halmaz Jordan-mértékének nevezzük.

Tétel (A Riemann int tulajdonságai) Legyenek f,g $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fv-ek, $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető és $\alpha\in\mathbb{R}$

Ekkor:
- Ha f integrálható A-n, akkor αf is integrálható A-n és $\int_A \alpha f = \alpha\int_A f$
- Ha f,g int.ható A-n $\Rightarrow$ $f+g$ int.ható A-n és $\int_A f+g = \int_A f + \int_A g$
- ——"—— és $\forall x\in A$-ra $f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_A f < \int_A g$

• Ha $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \emptyset$, és f int-ható A-n és B-n $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ int-ható $A \cup B$-n és $\displaystyle\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$

Köv. Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhetők:

• Ha $A \subseteq B \Rightarrow J(A) \leq J(B)$

• Ha $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \emptyset$, akkor

$$J(A \cup B) = J(A) + J(B)$$

Tétel (Integráltranszformáció) Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g: G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan diffható fgv., $H \subseteq G$ olyan, hogy $\overline{H} \subseteq G$, H Jordan-mérhető és tfh. g injektív $\operatorname{int}(H)$-n.

Ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv. korlátos $g\langle H \rangle$-n, akkor

$$\int_{g\langle H \rangle} f(x)\,dx = \int_A f(g(u)) \cdot |\det g'(u)|\,du$$

(értsd: ha az egyik oldal $\exists$, akkor a másik oldal is és egyenlőek)

Biz $\emptyset$

Köv Ha $H \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető, akkor $\forall c \in \mathbb{R}^n$ $H + c$ is Jordan-mérhető és

$$J(H + c) = J(H)$$

Biz ? $\square$

Anal ea

2022.05.09.

Improprius integrál:

def: Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nem korlátos $f: \mathbb{R}^n \supset\!\to \mathbb{R}_+$ fv.

$$\int_A f := \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]^n \cap A} f \qquad \text{(Ha a jobb oldal } \exists\text{)}$$

Ha $f: \mathbb{R}^n \supset\!\to \mathbb{R}$

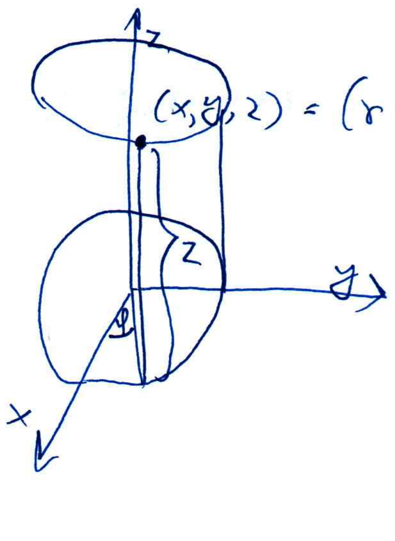
$$\int_A f := \int_A f^+ - \int_A f^- \qquad \text{(ha a jobb oldal } \exists\text{)}$$

Megj: $[-R,R]^n$ helyett lehetne

$$\int_A f = \lim_{\ell\to\infty} \int_{A_\ell \cap A} f$$ ahol A_ℓ Jordan-mérhető

$\bigcup_{\ell=0}^{\infty} A_\ell = \mathbb{R}^n$ és $A_k \subseteq A_\ell$, ha $(k \leq \ell)$

Hármas-integrál



$(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$

Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor ez a felírás egyértelmű.

Tétel Legyen $H \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$ Jordan-mérhető és

$$c: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

Ha f korlátos $c\langle H\rangle$ halmazon, akkor

$$\int_{c\langle H\rangle} f = \int_H f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r \, d(r,\varphi,z)$$

Biz c injektív $\mathrm{int}(H)$-n és

$$c'(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

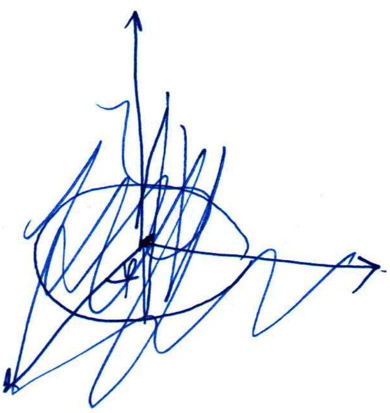
$$\det(c'(r,\varphi,z)) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$$

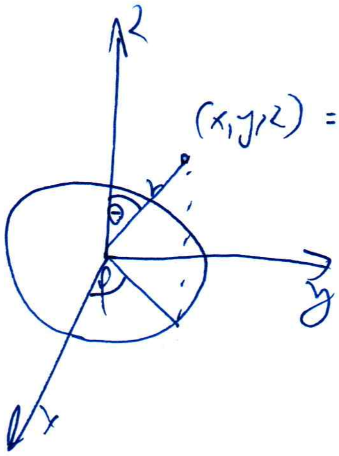
Gömbi koordináták

$0 \le \theta \le \pi$

$0 < \varphi < 2\pi$

$0 \le r$





$$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

Anal ea

2022.05.09

9

<u>Tétel</u> Legyen $H \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ Jordan-mérhető és

$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ int. $S\langle H\rangle$-n akkor

$$\int_{S\langle H\rangle} f = \int_H f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\cos\theta) \cdot r^2 \sin\theta \, d(r, \theta, \varphi)$$

(Ha egyik oldal $\exists$ akkor is $\exists$ és $=$)

Θ

Anal ea

2022.05.11.
1

Gyak

(1) $H := \{(x,y,z) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 8 - x^2 - y^2\}$

$$\int_H x^2 \, d(x,y,z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{henger koord.}}}{=} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{8-r^2} r^2\cos^2\varphi \cdot r \, dz \, d\varphi \, dr =$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (8-r^2) r^3 \cos^2\varphi \, d\varphi \, dr = \int_1^2 8r^3 - r^5 \, dr \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} \, d\varphi = HF$$

(2) $R>0$ sugarú gömb térfogata

$$\int_{B_R(0)} 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gömbi koord}}}{=} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot r^2 \cdot \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi \, dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[-r^2\cos\Theta\right]_{\Theta=0}^{\pi} d\varphi \, dr =$$

$$= \ldots = \frac{4R^3\pi}{3}$$

Fourier - analízis

Fourier-sorok:

def Legyen V egy valós vektortér. Azt mondjuk, hogy $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ skalárszorzás V feletti, ha $\forall x,y,z \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén:

- $\langle x,x\rangle \geq 0$ és $\langle x,x\rangle = 0$, ha $x=0$
- $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
- $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
- $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$

def: A $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ párt euklideszi térnek nevezzük, ha V valós vektortér és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ V felett

Pél ① $\mathbb{R}^n$?

def Legyen $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér és $(x_i)_{i\in I}$ egy V-beli rendszer. Azt mondjuk, hogy az $(x_i)_{i\in I}$

- ortogonális, ha $\forall i,j\in I$ $i\neq j$ esetén $\langle x_i, x_j\rangle = 0$
- ortonormált, ha ortogonális és $\forall i\in I$ $\langle x_i,x_i\rangle = 1$

Áll Ha $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, akkor egy V-beli nemnulla vektorokból álló ortogonális rendszer lin. ftlen

Biz HF

Anal ea

2022.05.11
2

Áll $C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$-ben ortogonális rendszer:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,1_{[-\pi,\pi]},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\cos(k\cdot id_{[-\pi,\pi]})\right)_{k\in\mathbb{N}^+},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin(k\cdot id_{[-\pi,\pi]})\right)_{k\in\mathbb{N}^+}$$ az

$$(f,g)\mapsto\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx$$ skalárszorzásra nézve

Biz $\boxed{?}$

def Legyen $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$. Ekkor az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$x\mapsto\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)$$ fv.-t trigonometrikus

polinomnak nevezzük

Tétel Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szám-sorozatok, ill $\forall n\in\mathbb{N}$

$$F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right).$$

Jelölje F az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fv.sor összegfv.ét. Ha $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$

egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, akkor

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos(kx)\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin(kx)\,dx$$

Biz $\boxed{?}$

Anal ea

2022.05.16
1

Volt [...]

Tétel: ~~[illegible]~~ (trigonometrikus rendszer teljessége)

Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, 2π szerint periodikus és $\forall k \in \mathbb{N}$ $a_k(f) = 0$, $b_k(f) = 0$, akkor $f \equiv 0$.

Biz $\emptyset$

Tétel: Legyen f 2π szerint periodikus, ~~[illegible]~~ folytonos ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) fv. Ha f Fourier-sora egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, akkor $\Phi(f) = f$

Biz: [?]

Tétel: Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folyt., diffható, 2π szerinti periodikus fv. $\Rightarrow$ f Fourier-sora egyenletesen konvergens

Biz $\emptyset$

Tétel (Dirichlet-tétel) Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ~~[illegible]~~., 2π szerinti periodikus, $[-\pi, \pi]$-en inthtó.

Tfh. $[-\pi, \pi]$ felbontható véges sok részintervallumra, úgy, hogy egy ~~[illegible]~~ belsejében f monoton és korlátos. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\Phi(f)x = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

Pé

Legyen f 2π-szerint periodikus és $f(x)=x^2$ $(\forall x\in[-\pi,\pi])$

$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(kx)\,dx=$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(kx)\,dx\overset{\text{parc.}}{=}\left[x^2\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{x=-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}2x\frac{\sin(kx)}{k}\,dx\overset{\text{parc.}}{=}$$

$$=\left[2x\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_{x=-\pi}^{\pi}-\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}2\frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx}_{\text{nulla!}}=4\pi\frac{\cos(k\pi)}{k^2}=(-1)^k\frac{4\pi}{k^2}$$

$$a_k(f)=(-1)^k\cdot\frac{4}{k^2}$$

$$b_k(f)=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin(kx)\,dx=0$$ szimetria...

[?]

Megj $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, $[-\pi,\pi]$-n integrálható és

- páros $b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin(kx)}_{\text{ptl}}\,dx=0$
- páratlan $a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos(kx)}_{\text{ptl}}\,dx=0$

Anal ea

2022.05.16
2

Fourier - transzformáció

def: Azt mondjuk, hogy a $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv. abszolút integrálható, ha $\forall$ korlátos intervallumon Riemann-int.ható és $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$

def $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,dx$$

def Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ abszolút int-ható. Ekkor a

$$F(f): \mathbb{R}\to\mathbb{C};\ \omega\mapsto\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$ fv.-t f Fouriertranszformáltjának nevezzük

$$F^{-1}(f): f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \omega\mapsto\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\omega x}\,dx$$ f inverz-F.transzf.

Tétel Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ abszolút int.ható fv.

- $F(f)$ folytonos
- $F(f)$ korlátos
- $\lim_{\omega\to\pm\infty} F(f)(\omega) = 0$

Biz $\emptyset$

Tétel $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absz. int. és $F(f)$ is absz. int. $\Rightarrow$

$$F^{-1}(F(f)) = f$$

$(\ldots)$

Biz $\emptyset$

Tétel Legyenek f, g, absz. integrálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv.ek

a, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$

b, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow F\left(x \mapsto f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(\omega) = |a|\, F(f)(a\omega)$

c, $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x \mapsto f(x - x_0))(\omega) = e^{-i\omega x_0} (F(f))(\omega)$

d, $\omega_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow F\left(x \mapsto e^{i\omega_0 x} f(x)\right)(\omega) = F(f)(\omega - \omega_0)$

e, $\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|\, dx < +\infty \Rightarrow F(f)$ diffható és

$$F(x \mapsto x f(x))(\omega) = i F(f)'(\omega)$$

f, Ha f diffható és f' absz. integrálható $\Rightarrow F(f')(\omega) = i\omega F(f)(\omega)$

Biz [?]

Anal en

2022.05.18.

1

Def Legyenek f, g $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv-ek, tfh. $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$ $\exists$ és véges. Ekkor az

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$ fv-t f és g konvolúciójának

nevezzük és $f*g$-vel jelöljük

Tétel Ha $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv-ek és $f*g$ $\exists$ $\Rightarrow$ $g*f$ $\exists$ és

$f*g=g*f$

Biz $x\in\mathbb{R}$

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt=\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-\tau)\,g(\tau)\dots\ [?]$$

$$\tau=x-t$$
$$t=x-\tau$$
$$dt=-\cancel{dt}\,d\tau$$

Tétel Legyenek f, g ~~$\mathbb{R}$~~ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ abszolút integrálható függvények és

tfh. $f*g$ is absz. int.ható. Ekkor

$$F(f*g)=F(f)\cdot F(g)$$

Biz $\emptyset$

Pél ①

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } |x|\le\frac{1}{2}\\ 0, & \text{ha else}\end{cases}$$

$$(F(f))(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ix\omega}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(\omega x)-i\sin(\omega x)\,dx=$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(\omega x)\, dx - i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(\omega x)\, dx = \left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$(F(f))(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{e^{i0x}}_{1}\, dx = 1$$

$$\Rightarrow (F(f))(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right), & \text{ha } \omega \neq 0 \\ 1, & \text{ha } \omega = 0 \end{cases}$$

(2) $f_\gamma(x)\ e^{-\gamma|x|}$ $\quad (\gamma > 0,\ x \in \mathbb{R}) \quad \omega \in \mathbb{R}$

$$F(f_\gamma)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|}\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\gamma x} \cdot e^{-i\omega x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma x} \cdot e^{-i\omega x}\, dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma t} \cdot e^{i\omega t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma x}\, e^{-i\omega x}\, dx = \dots$$

</tananyag>