Analízis 1. előadás

2021. 09. 06.

1

Tasnádi Tamás → www.math.bme.hu/~tasnadi

↳ követelmények ← OLVASNI

↳ jegyzetek

↳ ZH időpontok

↳ 0., 1., 2. – legalább 40%

6. hét (? 11. hét)

Évközi munka → aláírás

Vizsga

Végső jegy: $\frac{1}{4}ZH1 + \frac{1}{4}ZH2 + \frac{1}{2}VD$

40% – 55% – 65% – 80%

Tematika

1, Komplex számok

2, Számsorozatok

1. ZH

3, FGV-k határértéke, folytonosság

4, Deriválás

2. ZH

5, Integrálás

Általános jelölések:

Számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ term.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ egész

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$ rac.

$\mathbb{R}$ = ... végtelen tizedes tört

Halmazelmélet: $\cap, \cup, \subset, \supset, \in, \emptyset = \{\}$

Logikai: $\vee, \wedge, \neg, \forall$ = minden, $\exists$ = létezik

Komplex számok

Számkör bővítése $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Cél: Bővebb számkörök több műveletre legyenek zártak

Permanencia elv: műveletek tulajdonságai megmaradjanak

	$+, \cdot$	$-$	$/$	(majd) lim	$\sqrt{\ }$
$\mathbb{N}$	✓	✗	✗	✗	✗
$\mathbb{Z}$	✓	✓	✗	✗	✗
$\mathbb{Q}$	✓	✓	✓	✗	✗
$\mathbb{R}$	✓	✓	✓	✓	✗
$\mathbb{C}$	✓	✓	✓	✓	✓

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2$$

i = képzetes egység (egyetemben j) $\quad i \in \mathbb{C} \quad i^2 = -1$

$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1 \implies$ konjugálás

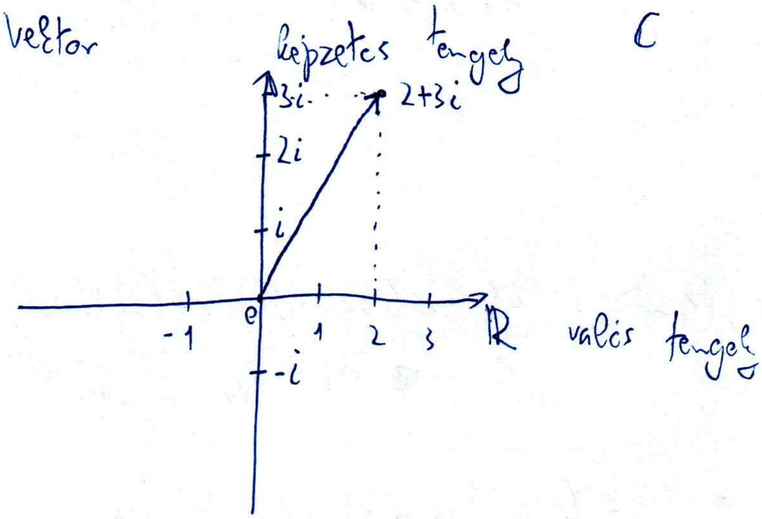
Pl.: $z = 2 + 3i$ $\qquad \operatorname{Re} z = 2 \in \mathbb{R}$

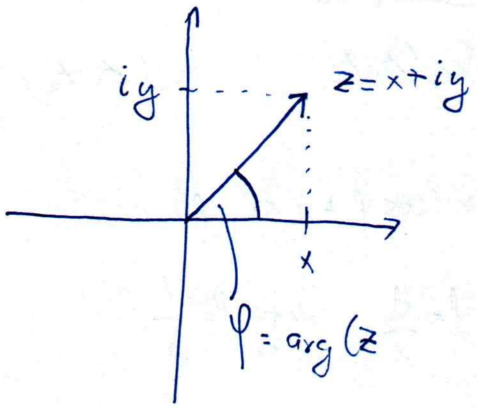
valós rész (2), képzetes rész (i mellette) (3) $\qquad \operatorname{Im} z = 3 \in \mathbb{R}$

Ábrázolás

vektor

$\mathbb{C}$





Hossz

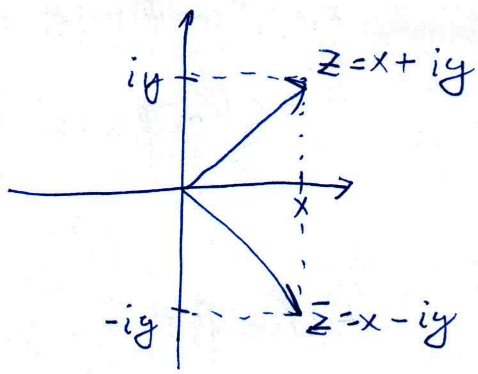
$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \in [0;+\infty[$$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

Konjugálás: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z = x+iy \mapsto \bar{z} = x-iy$$

(tükrözés valós tengelyre)

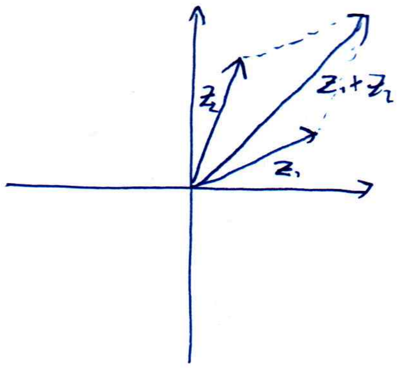


Összeadás, kivonás

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \pm \operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im}(z_1) \pm \operatorname{Im}(z_2)$$



$z, u, w \in \mathbb{C}$

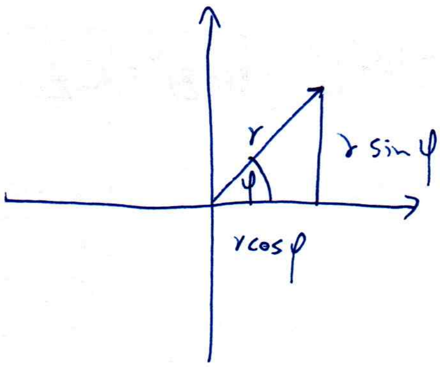
$(z+u)+w = z+(u+w)$

$\overline{z+u} = \bar{z}+\bar{u}$

Szorzás

Pl.: $(2+3i)(4-5i) = \underbrace{2\cdot 4}_{8} + \underbrace{2\cdot(-5)i}_{-10i} + \underbrace{(3i)\cdot 4}_{12i} + \underbrace{(3i)(-5i)}_{+15} = 23+2i$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1+iy_1 \\ z_2 &= x_2+iy_2 \end{aligned}\right\} \quad z_1\cdot z_2 = \dots = \underbrace{(x_1x_2-y_1y_2)}_{\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)} + i\underbrace{(x_1y_2+x_2y_1)}_{\mathrm{Im}(z_1\cdot z_2)}$$



$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x} \qquad \mathrm{ctg}\,\varphi = \frac{x}{y}$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad z_1\cdot z_2 = r_1r_2\Big(\underbrace{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} +$$

$$+\, i\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\Big) = r_1\cdot r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1+\varphi_2))\big)$$

Következmény: $z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$

Hf.: $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$\overline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$
$= r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

Analízis 1 előadás

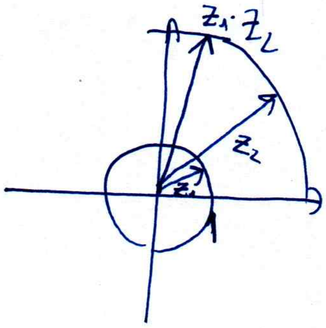
2021.09.06.

3

Geometriai jelentése

a) $|z_1| = 1 \qquad z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 \quad (r=1)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$



$z \cdot \bar{z} = |z|^2$ HF.:

$(x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - i^2y^2 =$

$= x^2 + y^2$

$r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r_1(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$

$= r_1^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r_1^2$

b) $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

(forgatva nyújtás)

Osztás

a) $$\frac{2+3i}{4-i} = \frac{2+3i}{4-i}\cdot\overbrace{\frac{4+i}{4+i}}^{1} = \frac{8+2i+12i-3}{4^2+1^2} = \frac{5}{17} + i\,\frac{14}{17}$$

nevező konjugáltjával bővítés

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}\cdot\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(-x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}$$

b, $\dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\cdot\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\ldots}{\cancel{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\ 1} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

2021.09.06 /2 fogyt.

$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ $\qquad z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

$$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 + y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$\mathbb{C} = \{ x+iy \mid x,y \in \mathbb{R} \}$ $\quad i^2 = -1$

Algebrai: $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$

Trigonometrikus: $z = r\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{e^{i\varphi}}$

Exponenciális: $z = re^{i\varphi}$

$e = 2{,}71\ldots \in$
természetes alapú log alapja
$(e^x)' = e^x$

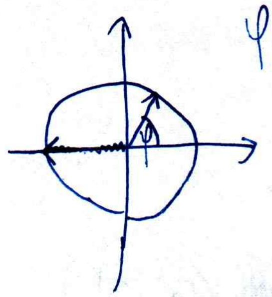
EULER-FORMULA

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\boxed{e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta +$$
$$+ i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i(\sin\alpha+\beta) = \boxed{e^{i(\alpha+\beta)}}$$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

φ szögű komplex egységvektor



Euler-formula $\varphi = \pi$-re

$$e^{i\pi} = \overbrace{\cos\pi}^{-1} + i\overbrace{\sin\pi}^{0} = -1$$

geometria

$\mathbb{R}$-ban kitüntetett

$(e^x)' = e^x$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$\mathbb{C}$-ben kitüntetett

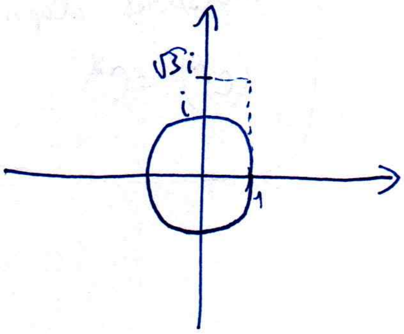
Egész kitevős hatványozás

$z\in\mathbb{C}$ $\quad z^n=?$ $\quad n\in\mathbb{N}$

$z^n=(x+iy)(x+iy)\cdot\ldots\cdot(x+iy)$ ← nehéz

$z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^n\cdot e^{in\varphi}$

Pl: $z=1+\sqrt{3}i$ $\quad z^5=?$



$r=|z|=\sqrt{1^2+3}=\sqrt{4}=2$

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{1}\to\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

$\arg z=\varphi=\frac{\pi}{3}$

$z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z^5=2^5e^{i\frac{5\pi}{3}}=32\cdot\left(\overbrace{\cos\frac{5\pi}{3}}^{\frac{1}{2}}+i\overbrace{\sin\frac{5\pi}{3}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=$

$=16-16\sqrt{3}i$

n. gyökvonás

$\sqrt[n]{z}=?$ $\quad \cancel{z\in\mathbb{N}}$ $\quad z\in\mathbb{C}$ $\quad n\in\mathbb{N}^+$

$\sqrt[n]{z}=w\iff z=w^n$

$z=re^{i\varphi}$ $\quad w=\rho\cdot e^{i\alpha}$ $\quad r,\rho\in[0;\infty[$

$\varphi,\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad ([0;2\pi[)$

$re^{i\varphi}=\left(\rho e^{i\alpha}\right)^n$

$re^{i\varphi}=\rho^n\cdot e^{in\alpha}$

$\to r=\rho^n$, és $\quad n\alpha=\varphi+2k\pi$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

$\sqrt{}$

Analízis 1 előadás

2021.09.08

2

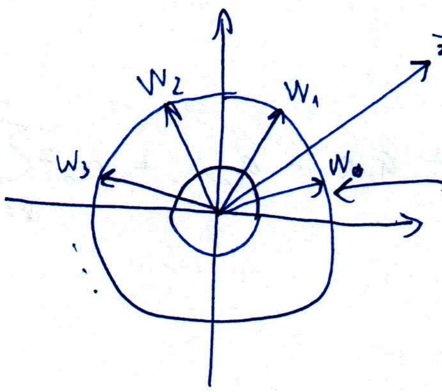
Ha $z=0 \Leftrightarrow r=0 \Rightarrow \sqrt[n]{z}=0$

Ha $z\neq 0$ akkor $r>0$

$\rho=\sqrt[n]{r}$; $\alpha=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k$; $k\in\underbrace{\{0,1,2,\dots(n-1)}_{n\text{ db}}$

$\underset{0}{\vee}$ $\underset{0}{\vee}$

$$\boxed{w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)} \qquad k=0,1,2,\dots,(n-1)}$$



komplex egységtojás

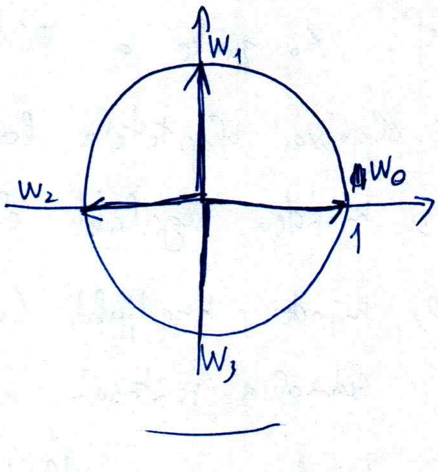
~~komplex egységtojás~~

Pl.: $\sqrt[4]{1}$

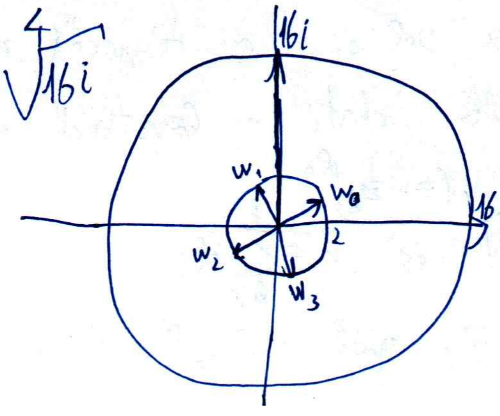
$|1|=1=\sqrt[4]{1}$

$r=1$

$\varphi=0$



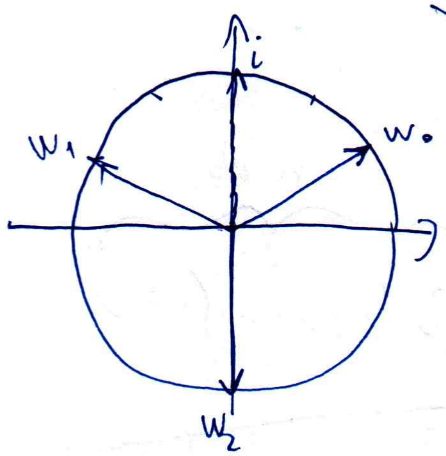
$\sqrt[4]{16i}$



$\rho=\sqrt[4]{16}=2$

$\alpha_k=\frac{\varphi}{4}+\frac{2\pi}{4}\cdot k$

$\sqrt[3]{i}$ $\quad z=i \quad r=|z|=1 \quad \varphi=\arg z=\frac{\pi}{2}$



$\rho=\sqrt[3]{r}=1$

$\alpha_0=\frac{\varphi}{3}=\frac{\pi}{6} \qquad \alpha_k=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\cdot k$

$\cancel{\alpha_1}$ $\qquad k=0,1,2$

Algebra alaptétele

polinom (= „több tag")

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

a_k: együttható

$\to a_n$ = főegyüttható $\quad a_n\neq 0$

monom: $a_k\cdot x^k$

Def.: x_0 gyöke a $P(x)$ polinomnak, ha $P(x_0)=0$

T.: algebra alaptétele komplex polinomokra

a, minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van (komplex) gyöke

b, minden n-edfokú (ahol $n\geq 1$) komplex polinomnak multiplicitással számolva pontosan n darab komplex gyöke van

c, minden P_n n-edfokú ($n\geq 1$) komplex polinom a tényezők sorrendjétől eltekintve ~~egyértelműen~~ egyértelműen írható a következő alakban:

$$P_n(z)=A\cdot(z-z_1)^{\alpha_1}\cdot(z-z_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_k)^{\alpha_k}$$

ahol $A\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z_i\in\mathbb{C}$, $\alpha_i\in\mathbb{N}$ és $n=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$

Gyökök: z_1, z_2, z_3 $\qquad \alpha_i$ - a z_i gyök multiplicitása

Analógia: természetes számok prímtényezős felbontása

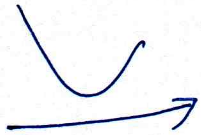
$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Biz.: $\emptyset$

polinom osztás

olyan, mint a kis Π, csak nagyobb, de a nagy sziget nem olyan mint a kis sziget

Pl.: $p(x) = x^2 + 1$-nek nincs valós gyöke



T: Algebra alaptétele valós polinomokra

MNT Minden P_n n-edfokú valós polinom a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen írható a következő alakban:

$$P_n(x) = A \cdot \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{k} (x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}$$

$x_i \in \mathbb{R}$ $\alpha_i \in \mathbb{N}$ $p_j, q_j \in \mathbb{R}$ $\beta_j \in \mathbb{N}$

Analízis 1 előadás

2021.09.13
1

Polinom osztás   p = osztandó   q = osztó   h = hányados

$$\left(x^5-4x^4+3x^3+2x^2-x+2\right):\left(x^2+3x+1\right)=x^3-7x^2+23x-60$$

$$\begin{array}{l}
-\ \ x^5+3x^4+x^3 \\
\hline
-7x^4+2x^3+2x^2-x+2 \\
-\ \ -7x^4-21x^3-7x^2-x+2 \\
\hline
+23x^3+9x^2-x+2 \\
-\ \ +23x^3+69x^2+23x+2 \\
\hline
-60x^2-24x+2 \\
-\ \ -60x^2-180x-60 \\
\hline
\boxed{156x+62}
\end{array}$$

maradék = m

$p(x)=q(x)\cdot h(x)+m(x)$

$0\le \deg(m)<\deg(q)$

$\deg(p)=\deg(q)+\deg(h)$

Tétel: $\forall$ p, q polinomra $\deg(p)>\deg(q)$ $\exists$ h, m, ahol
$p(x)=q(x)\cdot h(x)+m(x)$

Mikor használjuk?

L Valós polinom komplex gyökei konjugált párokban fordulnak elő

Elég egyetlen irreverzibilis másodfokú gyöktényezőt vizsgálni

$x(x)=x^2+px+q \qquad p,q\in\mathbb{R}$

$$x_{12}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=a\pm bi$$

Pe: $\underbrace{(z-(2-3i))}_{z_1}\underbrace{(z-(2+3i))}_{z_2=\overline{z_1}} = ((z-2)+3i)((z-2)-3i) =$

$= (z-2)^2 - (3i)^2 = z^2 - 4z + 13$

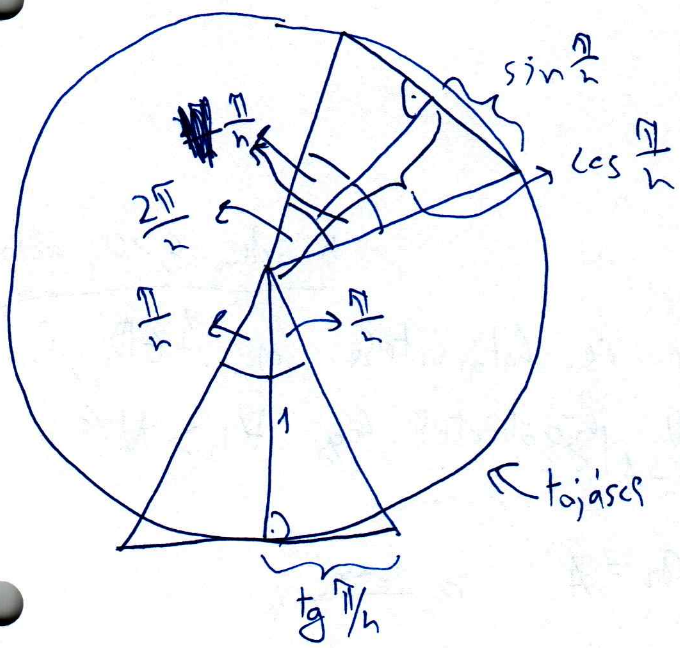
Valós számsorozatok

Motiváció: R=1 sugarú kör területe

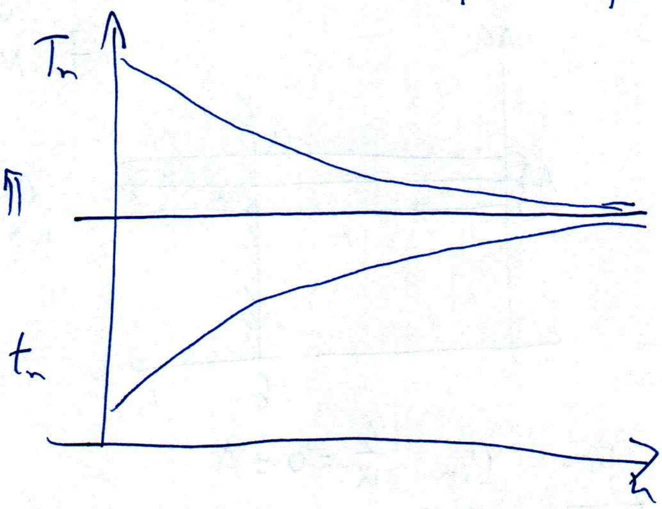
Ötlet: beírt és körülírt sokszögek területével közelítünk

beírt n-szög területe: $t_n = n\cdot \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$

körülírt n-szög területe: $T_n = n\cdot 1\cdot tg\frac{\pi}{n} = n\, tg\frac{\pi}{n}$



n	5	30	100	200
t_n	2,378	$\boxed{3,1}19$	3,139	$\boxed{3,14}1$
T_n	3,633	$\boxed{3,1}53$	3,143	$\boxed{3,14}2$



Hasonlóan lehet közelíteni a kör területet

Definíció: Számsorozat: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{N}^+)$; $n \mapsto f(n) = f_n$

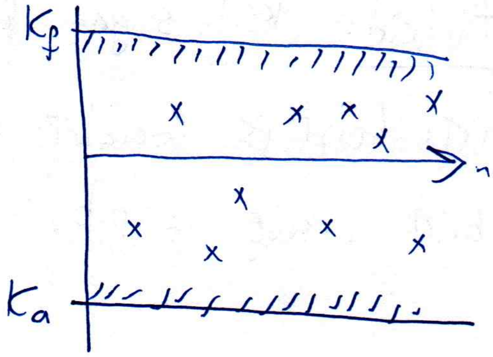
Használt jelölés: a_n, b_n, c_n

Megadás: 1, képlettel: $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = n\, tg\frac{\pi}{n}$

2, rekurzió $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

D.: az (a_n) sorozat felülről korlátos, ha létezik olyan K szám,
alulról

$\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \le K$
$\ge$



D.: az (a_n) sorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos

$\Updownarrow$

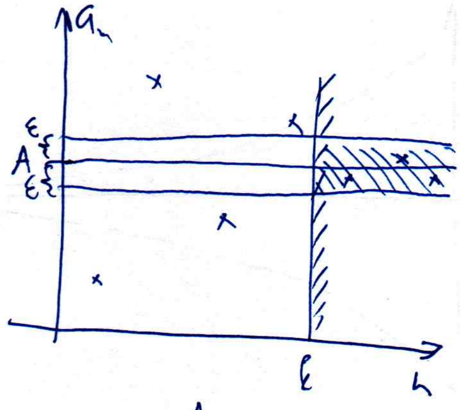
$\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{R}$ $|a_n| \le K$

Biz.: $k = \max\{|K_f|, |K_a|\}$

Pl.: $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \ge 1)$ korlátos

$b_n = n^2$ alulról korlátos

D.: az (a_n) sorozat konvergens és határértéke az $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$, akkor $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbérték, hogy $\forall n > N(\varepsilon)$ $|a_n - A| < \varepsilon$



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ $\qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} A$

Pl.: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = A$

Kell: $|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$

$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ ← jó küszöbérték

Tehát $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Analízis 1 előadás

Pl.: ~~Def~~ Def. alapján igazoljuk

$$a_n = \frac{3+n}{5-2n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2} \qquad N(\varepsilon) = ?$$

$$|a_n - A| = \left| \frac{3+n}{5-2n} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2(3+n)+(5-2n)}{2(5-2n)} \right| = \frac{11}{|10-4n|} =$$

$$\overset{n\geq 3}{=} \boxed{\frac{11}{10-4n} < \varepsilon} \iff n > \frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon}+10\right)$$

$$N(\varepsilon) = \max\left\{ \left[\frac{11}{4\varepsilon} + \frac{5}{2}\right] + 1,\ 3 \right\}$$

→ nem mindig tudjuk megoldani, ilyenkor becsülni kell

Pl.: $a_n = \dfrac{n^3-2n}{3n^3-2} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{3} = A$; $N(\varepsilon) = ?$

$$|a_n - A| = \left| \frac{n^3-2n}{3n^3-2} - \frac{1}{3} \right| = \ldots = \frac{|-6n+2|}{|9n^3-6|} \underset{\text{ha } n\geq 1}{=} \frac{6n-2}{9n^3-6} \cancel{<\varepsilon} <$$

felső becslés

pozitív számok hányadosa nő, ha számláló nő és/vagy a nevező csökken

$$< \frac{6n}{9n^3-6n^3} = \frac{6n}{3n^3} = \frac{2}{n^2} < \varepsilon \qquad n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$$

Tehát $N(\varepsilon) = \max\left\{\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]+1,\ 1\right\}$

<u>Def</u> (a_n) divergens, ha nem konvergens

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ha $\forall P > 0$ esetén $\exists N(P) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N(P)$ esetén $a_n > P$

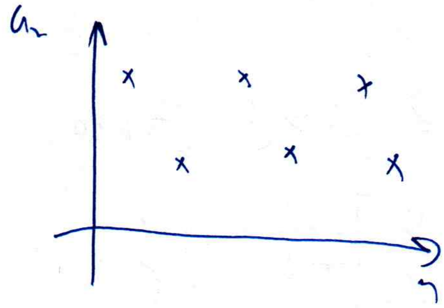
Def.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ha $\forall M < 0$, $\exists N(M) \in \mathbb{N}$, $\forall n > N(M)$, $a_n < M$

L.: $a_n \to -\infty \Leftrightarrow -a_n \to +\infty$

B.: $a_n < M \Leftrightarrow -a_n > -M = P$

Ha $a_n \to \pm\infty \Rightarrow (a_n)$ divergens
$\not\Leftarrow$

Pl.: $a_n = (-1)^n$
divergens



Analízis 1 előadás

2021.05.20

1

Sorozatok fajtái:

KONVERGENS – konvergensek: $a_n \to A \in \mathbb{R}$ Pl.: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

DIVERGENS

- végtelenhez tart: $a_n \to \infty \notin \mathbb{R}$ Pl.: $a_n = n \to \infty$
- mínusz végtelenhez tart: $a_n \to -\infty \notin \mathbb{R}$ Pl.: $a_n = -n^2 \to -\infty$

VAN HATÁRÉRTÉKE

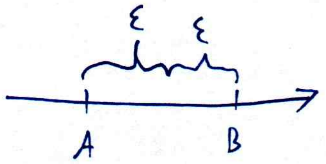
- egyéb : Pl.: $a_n = (-1)^n \dots$ } NINCS HATÁRÉRTÉKE

Határérték egyértelműsége

D: $a_n \to A \in \mathbb{R}$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$

T: Ha $a_n \to A \in \mathbb{R}$, és $a_n \to B \in \mathbb{R}$, akkor $A = B$

B: Indirekt: TFH $a_n \to A$, $a_n \to B$, $A \neq B$ $(A < B)$



Legyen $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$

$$a_n \to A \Rightarrow \exists N_a(\varepsilon),\ \forall n > N_a(\varepsilon),\ |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n \in \,]A-\varepsilon, A+\varepsilon[$$

$$a_n \to B \Rightarrow \exists N_b(\varepsilon),\ \forall n > N_b(\varepsilon),\ |a_n - B| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n \in \,]B-\varepsilon, A+\varepsilon[$$

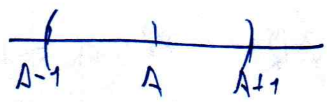
Tehát, ha $n > \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$, akkor

$$a_n \in \,]A-\varepsilon, A+\varepsilon[\,\cup\,]B+\varepsilon, B-\varepsilon[\,= \emptyset \quad \lightning$$

A konvergencia szükséges feltétele:

T.: Ha az (a_n) konvergens akkor korlátos

B.: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} A \in \mathbb{R}$, tehát $\varepsilon = 1$-hez $\exists N(1) \in \mathbb{N}$ küszöbindex



Ha $n > N(1)$, akkor $A-1 < a_n < A+1$

$K_a = \min\{A-1, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N(1)}\} \in \mathbb{R}$

$K_f = \max\{A+1,$ ——— 〃 ——— $\} \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$-re $K_a \le a_n \le K_f \Rightarrow (a_n)$ korlátos

Azonos nyelvi formulák

- P-ből következik Q $(P \Rightarrow Q)$
- P implikálja Q-t
- Q-nak elégséges feltétele P (P elégséges feltétele Q-nak)
- P-nek szükséges feltétele Q (Q szükséges feltétele P-nek)

(a_n) konvergens $\Rightarrow (a_n)$ korlátos

A határérték szükséges feltétele a konvergenciának (De nem elégséges)

A konvergencia elégséges feltétele a korlátosságnak (De nem szükséges)

Analízis 1 előadás

2021. 09. 20
2

- Q és P ekvivalens ($Q \Leftrightarrow P$)
- Q-nak szükséges feltétele P
  (P szükséges és elégséges feltétele Q-nak
- Q akkor és csak akkor teljesül, ha P

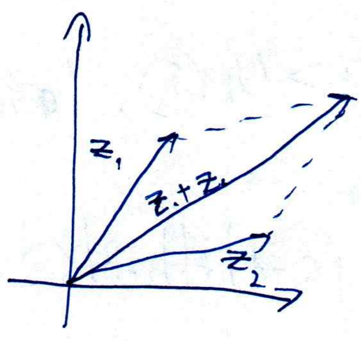
Háromszögegyenlőtlenség

a, Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $|x+y| \leq |x| + |y|$
"=", ha x és y azonos előjelű

B.: $-|x| \leq x \leq +|x|$
$+ \quad -|y| \leq y \leq +|y|$

$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \Leftrightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$ ✓

M.: $\mathbb{C}$-ben is igaz $\quad \mathbb{R}^2$-ben is igaz



$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$\Updownarrow$
geometriai háromszögegyenlőtlenség

b, $||x|-|y|| \leq |x-y| \leftarrow$ fordított háromszögegyenlőtlenség

Műveletek konvergens sorozatokkal

T.:

a, $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \Rightarrow a_n + b_n \to A+B$

b, $(a_n \to A) \Rightarrow c \cdot a_n \to c \cdot A \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

c, $(a_n \to 0) \wedge b_n$ korlátos $\Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0$

d, $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to A \cdot B$

e, $a_n \to A \Rightarrow |a_n| \to |A|$

f, $b_n \to B \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$

g, $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$

Konvergens sorozatokra a műveletek és a limesz felcserélhetők

Biz a, $a_n \to A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_a(\varepsilon) : \forall n > N_a(\varepsilon), \ |a_n - A| < \varepsilon$

$b_n \to B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_b(\varepsilon) : \forall n > N_b(\varepsilon), \ |b_n - B| < \varepsilon$

így ha $n > \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$, akkor

$$|a_n + b_n - (A+B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < 2\varepsilon$$

$$N_{ab}(\varepsilon) = \max\{N_a(\tfrac{\varepsilon}{2}), N_b(\tfrac{\varepsilon}{2})\} \ \checkmark$$

b, $|ca_n - cA| \leq |c| \cdot |a_n - A| \leq |c| \cdot \varepsilon$, ha $c \neq 0$

$$N_{ca}(\varepsilon) = N_a\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)$$

c, $|a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot K \leq \varepsilon \cdot K$, ha $n > N_a(\varepsilon)$

$|b_n| \leq K \in \mathbb{R}$ $\qquad N_{ab}(\varepsilon) = N_a\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$

d, $$a_n \cdot b_n = \underbrace{(a_n - A)}_{\downarrow 0}\underbrace{(b_n - B)}_{\downarrow 0} + \underbrace{a_n B}_{\downarrow AB} + \underbrace{A b_n}_{\downarrow AB} - AB = 2AB - AB = AB$$

e, $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N_a(\varepsilon)$ ✓

fordított háromszög egyenlőtlenség

f, TFH $B > 0$ (különben $\cdot(-1)$), b_n véges sok kivétellel nem 0, $b_n \to B \neq 0$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{B \cdot b_n}\right|$$

Legyen $\varepsilon = \frac{B}{2}$, ha $n > N\left(\frac{B}{2}\right)$, akkor

$$0 < \frac{B}{2} < b_n$$

$$x = \frac{|B - b_n|}{B b_n} \leq \frac{|B - b_n|}{B \cdot \frac{b_n}{2}} = \frac{2}{B^2}|B - b_n|$$ ✓

g, $$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \xrightarrow{d, f,} A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$ ✓

Pl.: $$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{500}{n^2} \longrightarrow 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$ ✓

DE

$$b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} \not\to 0$$

$$\searrow \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Pl.: $\lim a_n = ?$

$$a_n = \frac{3n^3 - 2n^2 + 5}{-n^3 + 3n - 6} = \frac{3 - \overset{\to 0}{\frac{2}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{5}{n^3}}}{-1 + \underset{\to 0}{\frac{3}{n^2}} - \underset{\to 0}{\frac{6}{n^2}}} \to \frac{3}{-1} = -3$$

$$a_n = \underbrace{\frac{n^2 - 8}{3n^3 + n}} \cdot \cos(2n+6)$$

$$\hookrightarrow \frac{0-0}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

T.: $a_n \to A \Rightarrow \sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$

$a_n \to A$, f folytonos A-ban $\Rightarrow f(a_n) \to f(A)$

Analízis ea

2021.05.22
1

$(a_n \to A)$

Ha f folytonos A-ban, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(A)$$

L: Ha $a_n \to A \Rightarrow \sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$

B: a) Ha $A=0$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = \sqrt{a_n} \iff a_n < \varepsilon^2$$

$$N_{\sqrt{a_n}}(\varepsilon) = N_{a_n}(\varepsilon^2)$$

b) Ha $A>0$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = \left|\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{A})(\sqrt{a_n}+\sqrt{A})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}\right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}} \leq$$

$$\leq \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \varepsilon \iff |a_n - A| < \varepsilon\sqrt{A}$$

Tehát ha $n > N_a(\varepsilon\sqrt{A}) \Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| < \varepsilon$ ✓

$\forall k$-ra $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} \qquad (k \in \mathbb{N}^+$$

Pl.: $a_n = \overbrace{\sqrt{2n^2+3n-1}}^{\alpha_n} - \overbrace{\sqrt{2n^2+n}}^{\beta_n} = \alpha_n - \beta_n =$

$$\text{"} \underset{\infty}{\downarrow} - \underset{\infty}{\downarrow} \text{"}$$

$$= \frac{(\alpha_n-\beta_n)(\alpha_n+\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n} = \frac{\alpha_n^2-\beta_n^2}{\alpha_n+\beta_n} = \frac{(\cancel{2n^2}+3n-1)-(\cancel{2n^2}+n)}{\sqrt{2n^2+3n-1}+\sqrt{2n^2+n}} =$$

$$= \frac{2n-1}{\sqrt{2n^2+3n-1}+\sqrt{2n^2+n}} = \frac{2-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\underset{0}{\underset{\downarrow}{3/n}}-\underset{0}{\underset{\downarrow}{1/n^2}}}+\sqrt{2+\underset{0}{\underset{\downarrow}{1/n}}}} = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pl.: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{2n^4+n^3-2n^2+8}}{\sqrt[3]{n^6+5n^2+3}} = "\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[4]{2+1/n-2/n^2+8/n^4}}{n^2\sqrt[3]{1+5/n^4+3/n^6}} = 0$

$\frac{n}{n^2} \to 0$, $\sqrt[4]{2+1/n-2/n^2+8/n^4} \to \sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{1+5/n^4+3/n^6} \to \sqrt[3]{1}$

Tétel $(a_n \to \infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{a_n} \to 0\right)$

Biz. $a_n > P > 0$, ha $n > N(P)$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{a_n} < \underbrace{\frac{1}{P}}_{=\varepsilon}$, ha $n > N(P) = N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Tehát $N_{\frac{1}{a_n}}(\varepsilon) = N_{a_n}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Visszafelé nem igaz!

$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \to 0$, de $\frac{1}{a_n} = n(-1)^n \leftarrow$ nincs határértéke

M.: $a_n > 0$, $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$

$a_n < 0$, $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to -\infty$

L.: ha $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} \to \infty$. Biz $\square$

Kiterjesztett számolási szabályok

$\frac{1}{\infty} \to 0$, $\frac{\text{határos}}{\infty} \to 0$, $\frac{\infty}{0} \to \infty$, $\infty \cdot \infty \to \infty$, $\infty + \infty \to \infty$

Határozatlan alakok:

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0

Ezekre általános azonos átalakítási szabály vagy ... szabály

T.: A limesz monoton

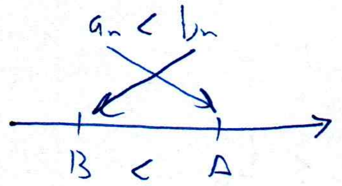
Ha $a_n \to A$, $b_n \to B$, és $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$-re, akkor

$A \le B$

Analízis ea

2021.05.22
2

Biz.: TFH $A > B$



Legyen $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$, akkor

$$A-\varepsilon \le a_n \le A+\varepsilon \quad , \text{ha } n > N_a(\varepsilon)$$
$$\vee$$
$$B-\varepsilon < b_n < B+\varepsilon \quad , \text{ha } n > N_b(\varepsilon)$$

Tehát ha $n > \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$, akkor $b_n < a_n$ ↯

M.: $\forall n > N_0$-ra $a_n \le b_n$ ∄ Biz

Rendőr - elv

T.: Ha $a_n \to A$, $b_n \to A$, és $\forall n$-re $a_n \le c_n \le b_n$,
akkor $c_n \to A$

legalábbis ~~pakizi~~

B.: Adott $\varepsilon > 0$

$$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon \quad , \text{ha } n > N_a(\varepsilon)$$
$$c_n$$
$$A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon \quad , \text{ha } n > N_b(\varepsilon)$$

$$A-\varepsilon < a_n < c_n < b_n < A+\varepsilon, \text{ ha } n > \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$$

M.:

T.: Ha $a_n \to \infty$ és $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N_0$, $a_n \le b_n \Rightarrow b_n \to \infty$

Ha $a_n \to -\infty$ és $\forall n > N_0 \in \mathbb{N}$-ra

$b_n \le a_n \Rightarrow b_n \to -\infty$

B.: Az a_n-ra .... $n > N_0(P)$-re $P < a_n \le b_n$

Pl.:

$$a_n = \frac{2n^6+n^3-n}{n^4+3} \geq \frac{2n^6-n^6}{n^4+3n^4} = \frac{n^6}{4n^4} = \frac{n^2}{4} \to \infty, \text{ Spec. rend. elv} \to a_n \to \infty$$

Pl.: $= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$$n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \boxed{1} & & \downarrow \\ & & \uparrow & & \\ 1 & \le & a_n & \le & 1 \end{array}$$

Néhány nevezetes számsorozat

D.: $a_n >> b_n$ (nagyobb nagyságrendű), ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

T.: 1, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, \text{ ha } |a| < 1 \\ 1, \text{ ha } a = 1 \\ \infty, \text{ ha } a > 1 \\ \emptyset, \text{ ha } a \le -1 \end{cases}$

2, $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot a^n = 0$ $\quad |a| < k$, $k \in \mathbb{N}^+$

hatványos sorozat (n^k), exponenciális sorozat (a^n)

3, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, ha $p > 0$

4, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Analízis ea

2021. 05. 22
3

5, $n^n >> n! >> a^n >> n^{\frac{1}{2}} >> \log n$ és

$a^n >> b^n$, ha $a > b > 1$

$n^k >> n^l$, ha $k > l > 0$

B.: 1, 2, 3 $\not\exists$ biz

$\sqrt[n]{n} \sim \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$

5/a, $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \leq \frac{1\cdot n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot\ldots\cdot n} = \frac{1}{n} \to 0$

b, $0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = \underbrace{\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{[a]}}_{k \text{ konstans}}\cdot\underset{\overset{\wedge\!\!|}{1}}{\frac{a}{[a]+1}}\cdot\ldots\cdot\underset{\overset{\wedge\!\!|}{1}}{\frac{a}{n}} \leq$

$\leq k\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n} = \frac{k\cdot a}{n} \to 0$

c, $\frac{n^k}{a^n} = \underset{\infty}{n^k}\cdot\underset{0,\ EXP}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} \longrightarrow 0$

d, $n^k >> n^l$, ha $k > l > 0$

$\frac{n^k}{n^l} = n^{k-l} \to \infty$, ha $k-l > 0$

Pl.:

$a_n = \frac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}} = \frac{(3^2)^n}{4^n + 3\cdot 3^n} = \frac{\overset{\to\infty}{\left(\frac{9}{4}\right)^n}}{1 + 3\cdot\underset{\to 0}{\left(\frac{3}{4}\right)^n}} \to \underline{\underline{\infty}}$

$a_n = \frac{n^3 + 9^{n+1}}{2n^5 + 3^{2n-1}} = \frac{n^3 + 9\cdot 9^n}{2n^5 + \frac{1}{3}\cdot 9^n} = \frac{\overset{\to 0}{n^3/9^n} + 9}{\underset{\to 0}{2n^5/9^n} + \frac{1}{3}} \to \frac{9}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{27}}$

Anal Ea

2021.09.27
1

$\sqrt[n]{p} \xrightarrow{n\to\infty} 1; \quad \sqrt[n]{n} \to 1$

$(p>0)$

Rendőr-elv

Pl. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{3^n+5^n}{2^n+4^n}}}_{a_n}$

$$\underset{\frac{5}{4}}{\overset{\downarrow}{\frac{5}{\sqrt[n]{2}\cdot 4}}} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n+4^n}} \leq \underset{\frac{5}{4}}{\overset{\downarrow}{\sqrt[n]{\frac{3^n+5^n}{2^n+4^n}}}} \leq \sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{4^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}\cdot 5}{4} \to \frac{5}{4}$$

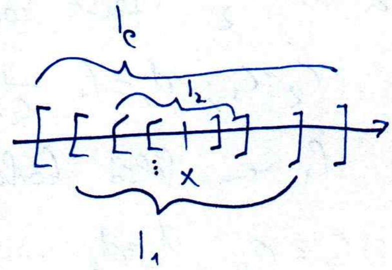
CANTOR-AXIÓMA - valós számok teljessége

Egymásba skatulyázott, zárt, korlátos, nem üres intervallumos metszete nem üres

$I_n = [a_n, b_n]$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ és

$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n$

Ekkor $\bigcap I_n \neq \emptyset \iff \exists x \in \mathbb{R}$



M.: Q-ban nem igaz! Pl.:

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$I_0 = [1, 2]$

$I_2 = [1{,}4; 1{,}5]$

$I_3 = [1{,}41; 1{,}42] \dots$

$|I_n| = 10^{-n}$

↳ intervallum hossza

$\underbrace{\left(\bigcap I_n\right)}_{\{\sqrt{2}\}} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

Cantor axióma miatt lehet a valós számokat végtelen tizedestört alakban reprezentálni

Elégséges tétel konvergenciára

Ha (a_n) monoton ~~↓~~ nő és felülről korlátos, akkor konvergens

$\exists K<\infty; \forall n: a_n \le K$

H (a_n) monoton csökken és alulról korlátos, akkor konvergens

Biz (felezéses technika)

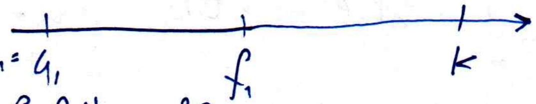
a) Konstruálunk egy zárt intervallum skatulyázást

$I_n = [c_n; d_n] \subset I_{n+1} = [c_{n+1}; d_{n+1}]$

b) $|I_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad (|I_k| = d_k - c_k) \Rightarrow \cap I_k = \{A\}$

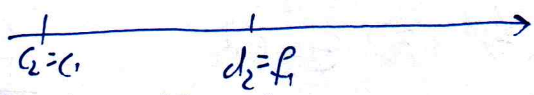
c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$c_1 := a_1 \quad d_1 := K$



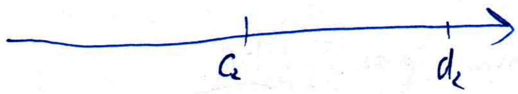
Ha $f_1 = \frac{c_1+d_1}{2}$ felső korlát, akkor

$c_2 = c_1; \; d_2 = f_1$



Ha f_1 nem felső korlát, akkor $\exists a_{n_2} > f_1$

$c_2 = a_{n_2}, \; d_2 = d_1$



Általában $f_k = \frac{c_k+d_k}{2}$. Ha f_k felső korlát

Ha f_k felső korlát: $c_{k+1} = c_k, \; d_{k+1} = f_k$

Ha f_k nem felső korlát: $c_{k+1} = a_{n_{k+1}} > c_k : d_{k+1} = d$

Anal ea

2021.09.24
2

$$|I_k| < \frac{|I_1|}{2^{k-1}} \to 0$$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \{A\} \in \mathbb{R}$$

CK alapján

$$c_k \le a_{n_k} \le a_m \le d_k \quad n_k < m$$

$$c_k \xrightarrow{k\to\infty} A, \quad d_k \xrightarrow{k\to\infty} A \implies a_n \to A$$

Rekurzív sorozatok

Adott az első elem a_1, és egy rekurziós összegzés

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

↳ adott fgv.

Van-e határértéke és hogyi?

Pl: $a_1 = 2 \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$

n	1	2	3	4	5
a_n	2	2,41	2,55	2,59	2,61

Sejtés $a_n \nearrow \iff \forall n \; a_n \le a_{n+1}$

Biz Teljes indukció

α, $n=1$-re igaz $\iff$ $a_1 = 2 < a_2 = 1+\sqrt{2}$ ✓

β, TFH, n-re is igaz $0 \le a_n \le a_{n+1}$ ← indukciós feltétel

γ, $1 \le a_n \le a_{n+1} \Rightarrow \sqrt{a_n} \le \sqrt{a_{n+1}} \Rightarrow 1+\sqrt{a_n} \le 1+\sqrt{a_{n+1}} \iff$

$\iff a_{n+1} \le a_{n+2}$ ✓

Határérték - jelölt TFH $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$a_{n+1} = 1+\sqrt{a_n}$ $\quad / \lim\limits_{n\to\infty}$

$A = 1+\sqrt{A}$ $\quad A \ge 0$

$A-1 = \sqrt{A}$

$A^2 - 3A + 1 = 0$

$A_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$ — $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$ ↯

Korlátosság

$\mathcal{L}$: $a_n \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

B.: Teljes indukcióval

α, $a_1 = 2 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,61$ ✓

β, TFH $a_n \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

γ $a_{n+1} = 1+\sqrt{a_n} \le 1+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \overset{?}{\le} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \iff$

Anal ea

2021.09.27
3

$$2+\sqrt{6+2\sqrt{5}} \leq 3+\sqrt{5}$$

$$(1+\sqrt{5})^2 = 1+2\cdot\sqrt{5}+5 = 6\cdot 2\sqrt{5}$$

$$3+\sqrt{5} = 3+\sqrt{5} \quad \checkmark$$

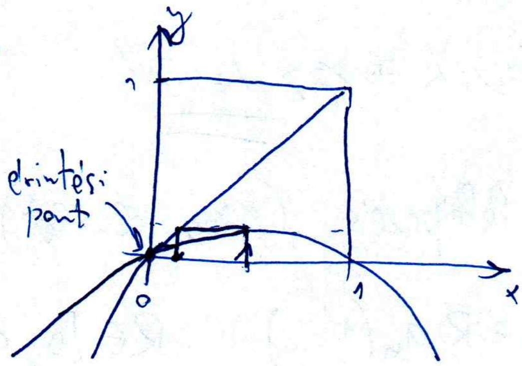
$\Rightarrow$ tehát $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ felső korlát

$a_n \nearrow$

$a_n \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\Big\} \; \exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Pl $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_{n+1} = a_n - a_n^2 = a_n(1-a_n)$

Grafikusan



n	1	2	3	4
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{39}{256}$
	0,5	0,25	0,1875	0,1523

Sejtés: a_n monoton csökken, $a_n \to 0$

$$a_{n+1} = a_n - \underset{\substack{\vee\!/ \\ 0}}{a_n^2} \leq a_n$$

Sejtés $\forall n$-re $a_n \geq 0$, sőt $\forall n$-re $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$

Biz: Teljes indukció ~~val~~

α, $n=1$-re $0 \leq a_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ✓

β, TFH $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$

γ, $\Rightarrow 0 \leq a_n^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_{n+1} = a_n - \underbrace{a_n^2}_{\geq 0} \leq \frac{1}{2}$

Ha $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, akkor $0 \leq \underbrace{x^2}_{x \cdot x} \leq x$ ✓

$\Rightarrow$ Ha $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow a_n^2 \leq a_n$

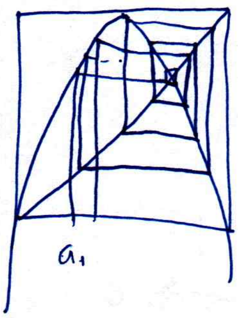
$\Rightarrow a_{n+1} = a_n - a_n^2 \geq 0$ ✓

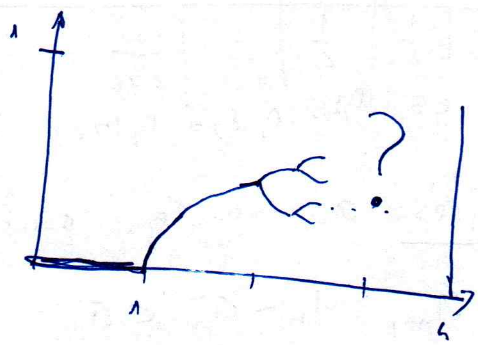
$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_n \searrow \\ a_n \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = A$

De $A = A - A^2 \Leftrightarrow A^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = 0}}$ ✓

$\boxed{\text{Pe}}$ Logisztikus ~~lep~~ leképezés (Káosz-elmélet)

$a_1 \in [0;1[$ $\quad a_{n+1} = R\, a_n(1-a_n)$ $\quad : R \in [0;4] \leftarrow$ (fix)





Anal ea

2021.09.27
4

Egy kitüntetett számsorozat

Motiváció: kamatos kamat 100%

Kezdő tőke: 1 Ft   év vége: $1+1=2$ Ft

éves kamat: 100%

éves kamat csatolás: $1+1=2$ Ft

havi kamat csatolás $1\cdot\left(1+\frac{1}{12}\right)\left(1+\frac{1}{12}\right)\cdots = 1\cdot\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} > 2$

heti kamat $\left(1+\frac{1}{52}\right)^{52} > 2$

⋮

Def

$$\boxed{e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Tétel: e_n monoton nő, felülről korlátos, tehát létezik a limesze

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e$$

Biz **Kellék**: számtani - mértani közép egyenlőtlenség

$a_n \geq 0$: $n = 1 \dots N$

Számtani közép: $A_N = \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_N}{N}$ (átlag)

Mértani közép: $G = \sqrt[N]{a_1\cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_N}$

számtani
mértani
2 változó
egyenlőtlenség

T: $A_N \geq G_N$ és $A_N = G_N \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_N$

B: $\emptyset$

9, ?

n db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 1db 1-es

$$A_{n+1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

$$G_{n+1} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}$$

$$A_{n+1} \geq G_{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Anal ea

$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$e_n < e_{n+1}$

$\forall n$-re $e_n < 4$ → (n db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ és 2 db $\frac{1}{2}$ számtani mértani közép)

$A_{n+2} = \left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)+2\cdot\frac{1}{2}\right):(n+2)$

$G_{n+2} = \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$G_{n+2} \leq A_{n+2}$

⋮

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71$

↳ Euler-szám

L.: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} = e^{-1}$

B.: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} =$

$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \to \frac{1}{e}$

L.: $\left(1+\frac{1}{pn}\right)^n \to e^{\frac{1}{p}}$ $\forall p \in \mathbb{N}$

B.: $\left(1+\frac{1}{pn}\right)^n = \sqrt[p]{\left(1+\frac{1}{pn}\right)^{pn}} \to \sqrt[p]{e} = e^{1/p}$

T.: $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a}$ ← $a \neq 0$

B.: $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n/a}\right)^{n/a}\right)^a \to e^a$ nem sorozat, hanem függvény

Pl.:

$$a_n = \left(\frac{n+6}{n+4}\right)^{n-3} \longrightarrow ?$$

$$a_n = \left(\frac{n+6}{n+4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{n+6}{n+4}\right)^{n} = \left(\frac{n+6}{n+4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1+\frac{6}{n}}{1+\frac{4}{n}}\right)^{n} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{6}{n}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{4}{n}}}\right)^{-3}}_{\to 1} \cdot \frac{\left(1+\frac{6}{n}\right)^{n} \to e^6}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n} \to e^4} = \frac{e^6}{e^4} = e^2 \checkmark$$

Egy gyakori hiba: LETAKARÁS:

Helyes: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$

ha f folytonos

Helytelen: ~~ha~~ $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a_n) = f_n\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)}$

Pl.:

$$a_n = \left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{2n^2} = \left(\frac{1+\frac{2}{2n^2}}{1+\frac{-1}{2n^2}}\right)^{2n^2} = \frac{\left(1+\frac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\frac{-1}{2n^2}\right)^{2n^2}} \longrightarrow \frac{e^2}{e^{-1}} = e^3$$

$$b_n = \left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{4n^2} = a_n^2 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = e^6$$

$$c_n = \left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{2n^3} = a_n^n$$

LETAKARÁSCHWESZÉLY

Rendőr-elv

$$e^3-1 < a_n < e^3+1$$

$$\infty \longleftarrow 7^n < (e^3-1)^n < a_n^n < (e^3+1)^n$$

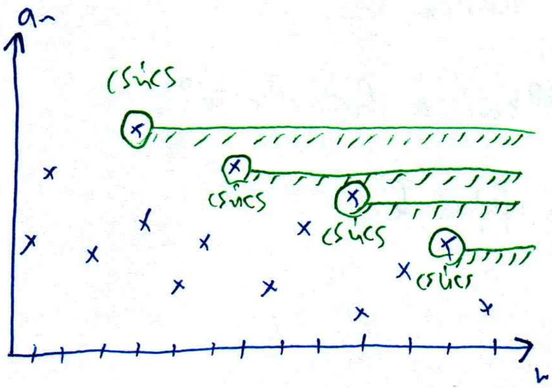
$$\longrightarrow a_n^n \to \infty$$

Anal ea

2021.09.29
2

Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztás tétel

D.: Az (a_n) sorozatban az a_k elem csúcs, ha $\forall$ $n > k$ esetén $a_k \geq a_n$



L.: Minden korlátos sorozatnak van monoton részsorozata

B.: a, Ha a sorozatban végtelen sok csúcs van, akkor ezek egy monoton csökkenő részsorozatot alkotnak

b, Ha a sorozatban véges sok csúcs van, akkor az utolsó csúcs után bármely a_n elem után van a_n-nél nagyobb vagy egyenlő elem. Így kiválasztható egy monoton növő részsorozat

T.: B-W féle kiválasztási tétel

Minden korlátos sorozatnak van korlátos részsorozata

B.: (a_n) korlátos $\overset{L}{\Rightarrow}$ $\exists (a_{n_k})$ monoton részsorozata
$\Rightarrow (a_{n_k})$ (~~konvergens~~) korlátos
$\Rightarrow a_{n_k}$ konvergens

Mandelbrot-halmaz

$M = \{ c \in \mathbb{C} \mid z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + i$

$0, c, c^2+c, (c^2+c)^2+c \ldots$

Cauchy-féle konvergencia kritérium

T: Az (a_n) sorozat konvergens $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$: $\exists N(\varepsilon)$, hogy

$$\forall n, m > N(\varepsilon),\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(A sorozat egymáshoz „közel kerülnek")

M: Nem szerepel a feltételben a határérték

M: Valós számok teljességét fejezi ki:

$\mathbb{Q}$-ban nem igaz

B: Tudjuk, hogy $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \le |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

hogy $n, m > N(\varepsilon)$

($\Longleftarrow$) Vázlat (*)

Intervallum skatulyázással kapható meg a határérték

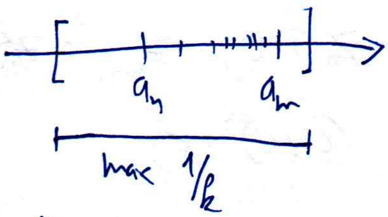
Legyen $N_k = N\left(\frac{1}{k}\right)$ az $\varepsilon = \frac{1}{k}$ lesz küszöbindexe.

Feltételezzük, hogy $N_k \le N_{k+1}$

$$I_k = \left[\inf\{a_n \mid n > N_k\},\ \sup\{a_n \mid n > N_k\}\right]$$

legnagyobb alsó korlát | legkisebb felső korlát

$k \rightsquigarrow N_k < n, m$



$\{A\} = \bigcap_k I_k$ Cantor-axióma

Anal ea

2021.09.29

3

T.:/A.:

Ha a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz nem üres és felülről korlátos, akkor létezik ~~...~~ legkisebb felső korlátja

D.: K a $\cancel{H \neq}$ $\overset{\neq \emptyset}{H} \subset \mathbb{R}$ legkisebb felső korlátja, ha

1, K felső korlát azaz $\forall k \in H$ esetén $k \le K$

2, Ha K' felső korlát, akkor $K \le K'$

J.: $H \subset \mathbb{R}$ $H \neq \emptyset$

Anal en

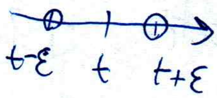
2021.10.04
1

Inf, Sup, → részhalmaz legkisebb felső korlát
↳ részhalmaz legnagyobb alsó korlát

Sorozat torlódási pontja

D.: környezet: A $t \in \mathbb{R}$ szám ε sugarú környezete ($\varepsilon > 0$)

$$K_\varepsilon(t) =]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$$



A $+\infty$ p paraméterű környezete ($p \in \mathbb{R}$)

$$K_p(+\infty) =]p; +\infty[$$

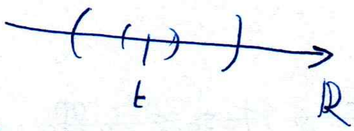
A $-\infty$ M paraméterű környezete ($M \in \mathbb{R}$)

$$K_M(-\infty) =]-\infty; M[$$

D.: Torlódási pont (sűrűsödési pont)

A $t \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ pont az (a_n) sorozat torlódási pontja, ha t minden környezete az (a_n) sorozat végtelen sok elemét tartalmazza

L.: t az (a_n) sorozat torlódási pontja $\Longleftrightarrow \exists\, a_{n_k}$ részsorozat amelyre $a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} t$



Pl.: $a_n = 5 \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow$ ~~tp~~ $S = \{5\}$

Pl.: $a_n = (-1)^n \Rightarrow S = \{+1, -1\}$

Pl: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow S = \{0\}$

Pl: $a_n = (-1)^n \cdot n \Rightarrow S = \{+\infty; -\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}}$

B.: t torl. pont $\Leftrightarrow \exists\, a_{n_k} \to t$ részsorozat

($\Rightarrow$) Legyen $t \in \mathbb{R}$

$\varepsilon_1 = 1$ esetén $\exists\, a_{n_1} \in K_{\varepsilon_1}(t)$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ esetén $\exists\, a_{n_2} \in K_{\varepsilon_2}(t)$

$\vdots$

$\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ esetén $\exists\, a_{n_k} \in K_{\varepsilon_k}(t)$

Hasonló biz $t = \pm\infty$ ($\triangle$)

($\Leftarrow$) TFH

$a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} t \in \mathbb{R}$, Akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy

$n_k > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k} - t| < \varepsilon \Leftrightarrow a_{n_k} \in K_\varepsilon(t)$

$\Updownarrow$

$k > K(\varepsilon) \Rightarrow$ az (a_{n_k}) részsorozat végtelen sok eleme esik $K_\varepsilon(t)$-be

---

T.: ~~(Egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha egy torlódási pontja van!)~~

Egy sorozat csak pontosan akkor $\exists$ határértéke, ha egy torlódási pontja van. Akkor az az egy torlódási pont a limesz

Anal ea

2021.10.04
2

M.: Egy sorozat torlódási pontjai érzéketlenek a sorozat átrendezésére

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{\pi(n)}$, ahol $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ „átrendezés" = bijekció

Limesz szuperior, limesz inferior

D.: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \{(a_n)$ torlódási pontjainak szuprémuma

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \{$ ——— " ——— infimuma

L.:
~~M.~~: Legyen S egy (a_n) sorozat torlódási pontjainak halmaza

$S \subset \overline{\mathbb{R}}$, $S \neq \{\}$

B.: Ha (a_n) felülről nem korlátos $\Leftrightarrow +\infty \in S$

Ha (a_n) alulról nem korlátos $\Leftrightarrow -\infty \in S$

Ha (a_n) korlátos, akkor van konvergens részsorozata:

$a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} A \Rightarrow A \in S$

L.: S = torlódási pontjai (a_n)-nek

$\inf S \in S$, $\sup S \in S$

Pl.: $S = ?$, $\limsup = ?$, $\liminf = ?$, $\lim = ?$

$a_n = n$

$S = \{+\infty\} \Rightarrow \limsup = \liminf = \lim = +\infty$

Pl: $a_n = (-1)^n$; $S = \{-1; +1\}$

$\liminf a_n = -1$

$\limsup a_n = 1$

$\lim a_n \nexists$, mert $|S| > 1$

L.: (a_n)-nek van határértéke, $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$

B.: $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n \Leftrightarrow |S| = 1$

M.: Mindig igaz, hogy $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$

M.: $\forall$ sorozatnak $\exists$ lim inf és lim sup

Pl.: $a_n = 2^{(-1)^n \cdot n} = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 2^{-n}, & \text{ha } n \text{ ptl} \end{cases}$

$2^n \to +\infty \quad 2^{-n} \to 0 \Rightarrow S = \{0; +\infty\}$

VALÓS SZÁMOK

Valós számok tulajdonságait axiómákba foglaljuk

Algebrai axiómák

a, „+" művelet $\quad + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (a,b) \to a+b$

1, $(a+b)+c = a+(b+c)$ asszociatív

2, $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$, $a+0 = 0+a = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ létezik nullelem

3, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists! x \in \mathbb{R}$ $a+x = x+a = 0$

$x = -a$

4, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a+b = b+a$

Anal ea

2021.10.01
3

$(\mathbb{R},+)$ csoport (1-3) axióma, sőt
$(\mathbb{R},+)$ kommutatív csoport (1-4) axióma

„$\cdot$" művelet $\cdot\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(a,b)\mapsto a\cdot b$

5, asszociatív $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

6, $\exists 1\in\mathbb{R}: 1\neq 0: \forall a\in\mathbb{R}\ 1\cdot a = a\cdot 1 = a$

7, Inverz: $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists!\, x\in\mathbb{R}: a\cdot x = x\cdot a = 1 \quad x = a^{-1} = \frac{1}{a}$

8, kommutatív $a\cdot b = b\cdot a$

$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ kommutatív csoport

„+" és „$\cdot$"

9, „$\cdot$" disztributív „+" felett
$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

(1-9) axióma $\Rightarrow (\mathbb{R},+,\cdot)$ testet alkot

Pl.: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ is test

Rendezési ~~axióm~~ axiómák

$\mathbb{R}$-ben adott egy „<" reláció

10, trichotómia: $\forall a,b\in\mathbb{R}$ esetén
$a<b$ vagy $a=b$ vagy $a>b$ (kizáró vagy)

11, tranzitivitás
$a<b$ és $b<c \Rightarrow a<c$

12, $a<b \Rightarrow a+c<b+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

13, $a<b$ és $c>0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

$(\mathbb{R};+,\cdot,<)$ - rendezett test

$(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ - rendezett test

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ - test, de nem teheto rendezett testté

14, ARCHIMÉDESZ-féle axióma

α, $1 \in \mathbb{N}$

β, Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n+1 \in \mathbb{N}$

γ, $\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{R}$, melyre α, β teljesül

$\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}^+$, hogy $x<n$

15, CANTOR axióma

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n$ - zárt, korlátos, nem üres

$\Rightarrow \bigcap I_n \neq \emptyset$

T.: 1-15 axióma egyértelműen meghatározza $\mathbb{R}$-t

Anal ea

Emlék:

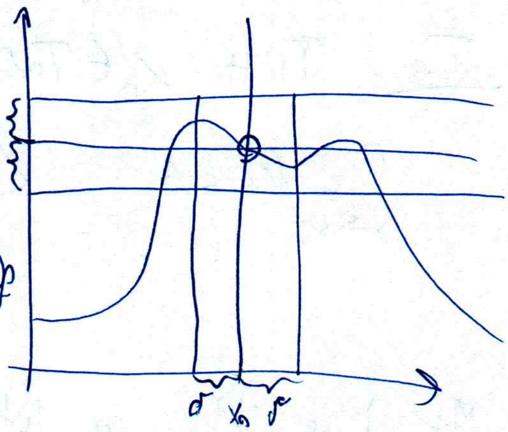
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, ha

① $x_0 \in \text{Tor}(D_f)$

②

$\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$,

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in \dot{K}_{\delta(\varepsilon)}(x) \cap D_f$



$\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{2x+5} = 3$; $\delta(\varepsilon) = ?$

$$|f(x) - A| = \left|\sqrt{2x+5} - 3\right| = \frac{\overbrace{|2x+5-9|}^{2(x-2)}}{\sqrt{2x+5}+3} =$$

$$= \frac{2}{\cancel{\sqrt{2x+5}}+3} \cdot |x-2| \le \frac{2}{3} |x-2| < \varepsilon, \text{ ha}$$

$$|x-2| < \frac{3}{2}\varepsilon = \delta(\varepsilon)$$

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$ $\delta(\varepsilon) = ?$

$$|f(x) - A| = \left|\frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{6-(x+3)}{6(x+3)}\right| = \frac{|3-x|}{6|x+3|} \le$$

$$\le \frac{|x-3|}{6(2+3)} < \varepsilon, \text{ ha } |x-3| < 30\varepsilon$$

Ha $|x-3| \le 1$

$$\delta(\varepsilon) = \min\{30\varepsilon, 1\}$$

ÁTVITELI ELV (szükséges elégséges feltétel fgv. határértékére)

T.: TFH $x_0 \in Torl(D_f)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall x_n \to x_0 \;;\; \lim(f(x_n)) = A$$

$x_n \neq x_0,\ x_n \in D_f$

végtelen sok sorozat határértéke

M.: Mire jó? a, tételek „átírása"

b, $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$ esetre

Mire nem jó? $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

Biz.: $(\Rightarrow)$ Legyen adott $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0$,

amelyre $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in \dot{K}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap D_f$

$x_n \to x_0 \Rightarrow \exists N(\delta(\varepsilon))$, hogy, ha $n > N(\delta(\varepsilon))$

akkor $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$

$\Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\delta(\varepsilon))$ ✓

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ ✓

(*) $(\Leftarrow)$ Indirekt: TFH $\forall x_n \to x_0$ $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$

esetén $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ de $\cancel{\lim_{x\to x_0} f(x) = A}$

Azaz $\exists \varepsilon > 0$, amelyre $\nexists \delta(\varepsilon)$, hogy .....

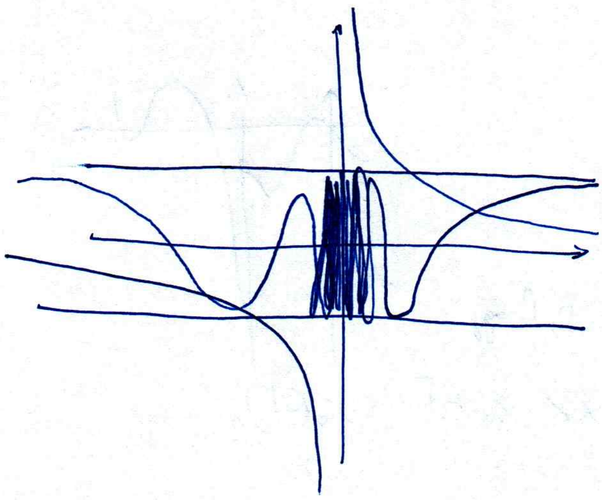
Tehát $\delta_n = \frac{1}{n}$ nem jó.

Anal en

2021.10.11
2

Pl! igazoljuk, hogy $\nexists \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$D_f: \mathbb{R}\setminus\{0\}$ Torl $D_f = \overline{\mathbb{R}}$



$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)=0 \iff \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$f(x_n) = 0$

$\cos\left(\frac{1}{x_n'}\right) = 1 \iff \frac{1}{x_n'} = 2\pi n$

$x_n' = \frac{1}{2\pi n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad f(x_n') = 1$

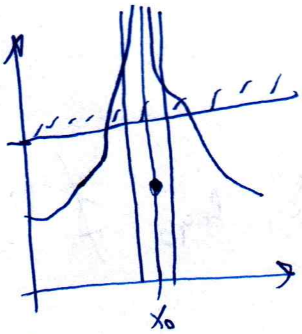
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ ✓

Végesben vett határértékek

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

x_0 \ A	$A\in\mathbb{R}$	$A=+\infty$	$A=-\infty$
$x_0\in\mathbb{R}$	✓	✓	$\nexists$
x_0+0	✓	$\nexists$	✓
x_0-0	✓	$\nexists$	$\nexists$

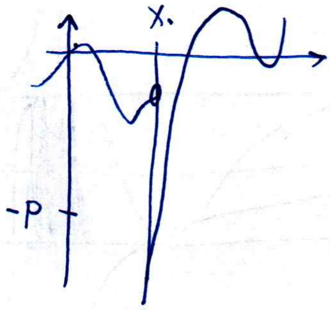
D.: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$



① $x_0 \in$ Torl D_f

② $\forall P>0$, $\exists \delta(P)$, hogy $f(x)>P$, ha $x \in \dot{K}_{\delta}(x_0) \cap D_f$

D.: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$, ha



① $x \in$ Torl $(D_f \cap (x_0;+\infty))$

② $\forall P>0$ esetén $\exists \delta(P)>0$, hogy

$f(x)<-P$, ha $x_0<x<x_0+\delta$, $x_0\in D_f$

Végtelenben vett határérték

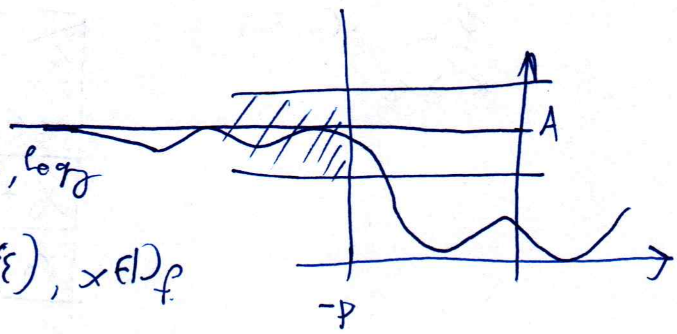
x_0 \ A	$A\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	△	△	✓
$-\infty$	✓	△	△

D.: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$, ha

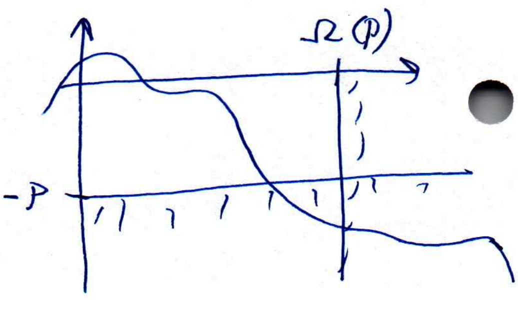
① $-\infty \in$ Torl (D_f)

② $\forall\varepsilon>0$, esetén $\exists\Omega(\varepsilon)>0$, hogy

$|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $x<-\Omega(\varepsilon)$, $x\in D_f$



D.: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, ha



① $+\infty\in$ Torl (D_f)

② $\forall P>0$ esetén $\exists\Omega(P)>0$

amelyre $f(x)<-P$, ha $x>\Omega(P)$, $x\in D_f$

Közös def

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad x_0, A \in \overline{\mathbb{R}}$$

1. $x_0 \in \text{Torl}(D_f)$
2. Az A $\forall K(A)$ környezetéhez $\exists$ az x_0-nak egy $\dot{K}(x_0)$ környezete, amelyre, ha

$$x \in \dot{K}(x_0) \cap D_f \text{, akkor } f(x) \in K(A)$$

M.: Az átviteli elv és a rendőr szabály is kiterjeszthető minden határérték típusra

Pl.: $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ \shortparallel \\ x_0}} \frac{2-3x}{x+1} = -3 = A \; ; \; \Omega(\varepsilon) = ?$

$$|f(x) - A| = \left| \frac{2-3x}{x-1} - (-3) \right| = \left| \frac{2-3x+3x+3}{x+1} \right| =$$

$$= \frac{5}{|x+1|} \overset{x>-1}{=} \frac{5}{x+1} < \frac{5}{x} < \varepsilon \text{ , ha } x > \frac{5}{3}$$

- C.A. + többi ax $\iff$ D.A. + többi ax

  Cantor ax $\iff$ Dedekind ax
  $[[[\,]]]$ $\quad\exists$ Sup, Inf

VALÓS EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE, FOLYTONOSSÁGA

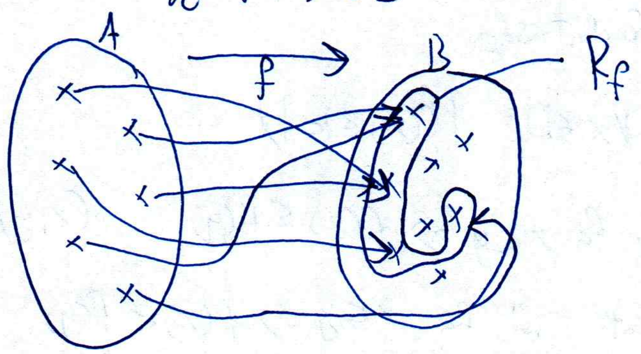
- Alapfogalmak

  D.: függvény = egyértelmű reláció

  $f: A \longrightarrow B; \quad a \longmapsto f(a) = \ldots$

  f: függvény jele
  A: értelmezési tartomány (DOMAIN), $D_f = A$
  B: érkezési halmaz (CODOMAIN)

- f az $A = D_f$ halmaz $\forall a \in D_f$ eleméhez egyértelműen rendel egy $f(a) \in B$



Értékkészlet = RANGE: $R_f = \{f(a) \mid a \in D_f\}$ $\qquad R_f \subset \text{Codom}(f)$

- ~~$f: A \to B$~~

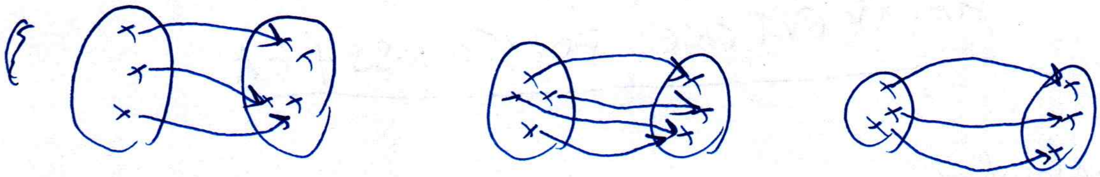
$f: A \to B$ <u>szürjektív</u>, ha $R_f = B$

(B $\forall$ pontjába legalább 1 nyíl fut be

$f: A \to B$ <u>injektív</u>, ha $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(B minden pontjába legfeljebb 1 nyíl fut be)

$f: A \to B$ <u>bijektív</u>, ha szürjektív és injektív



INJEKTÍV SZÜRJEKTÍV BIJEKTÍV

$f: D_f \to B$ INJEKTÍV

f inverze $\quad f^{-1}: R_f \to D_f \quad y \to f^{-1}(y) = x$

amelyre $f(x) = y$

Mostantól: $D_f, R_f, \text{Codomain}(f) \subset \mathbb{R}$

<u>D:</u> f felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in D_f: f(x) \leq K$

Hasonlóan: alulról korlátosság

Korlátosság, korlát $(\forall x \in D_f: |f(x)| \leq K)$

<u>D:</u> f monoton nő, ha $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$

f szigorúan monoton nő, ha $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

<u>D:</u> f páros, ha $f(-x) = f(x)$

f páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$

Anal ea

2021. 10. 06
2

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

D: f periodikus, ha $\exists T > 0$, $T \in \mathbb{R}$

$\forall x: \ f(x) = f(x+T)$

A legkisebb ilyen T az f periódusa

Volt: $K_\varepsilon(t) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$

Pontozott környezet: $\dot{K}_\varepsilon(t) = K_\varepsilon(t) \setminus \{t\}$

D. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $\quad t \in \overline{\mathbb{R}}$ a H ~~halmaz~~ halmaz torlódási pontja, ha t $\forall$ környezete a H-nak ∞ sok elemét tartalmazza

$\forall \varepsilon > 0: \ |H \cap K_\varepsilon(t)| = \infty$

Jelölés: $\operatorname{Tor} H = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \text{ a } H \text{ torlódási pontja}\}$

M.: $+\infty \in \operatorname{Tor} H \iff H$ felülről nem korlátos

$-\infty \in \operatorname{Tor} H \iff H$ alulról nem korlátos

D*: A $t \in \mathbb{R}$ a $H \subset \mathbb{R}$-nek torlódási pontja, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\dot{K}_\varepsilon(t)$ a H legalább 1 elemét tartalmazza

Lemmácska: $\quad D \iff D^*$

Biz: $(\Rightarrow)$ ~~Triviálisch~~ TRIWIÁLISCH ✓

$(\Leftarrow)$ Legyen t a D^* def szerint H torlódási pontja

$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1}$-re $\exists\ h_1 \in H \cap \dot{K}_{\varepsilon_1}(t)$

$\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, |t-h_1|\right\}$-re $\exists h_2 \in H \cap \dot{K}_{\varepsilon_2}(t)$

$\varepsilon_{n+1} = \min\left\{\frac{\varepsilon}{n+2}, |t - h_{n+1}|\right\}$

<u>Pl</u> $H = \{1\}$; $\text{Tor } H = \emptyset$

Sőt, ha $|H| < \infty$, akkor $\text{Tor } H = \emptyset$

<u>Pl</u> ~~...~~ $H = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$ $\quad \text{Tor } H = 0$

$\text{Tor}(\mathbb{Z}) = \{+\infty; -\infty\}$

$\text{Tor}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}}$

$\text{Tor}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}}$ ~~...~~

<u>L:</u> $t \in \text{Tor } H \iff \exists (h_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}: h_n \in H \setminus \{t\}$

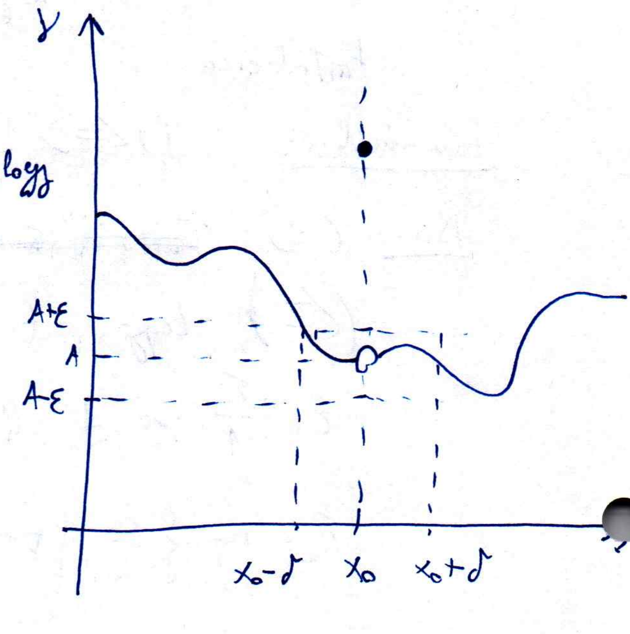
Függvény határértéke

<u>D:</u> , hogy az f függvény határértéke x_0-ban $A \in \mathbb{R}$

$\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A\right)$, ha $x_0 \in \text{Tor}(D_f)$

1, $x_0 \in \text{Tor}(D_f)$

2, $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $x \in D_f$, akkor ~~...~~ $|f(x) - A| < \varepsilon$



$2 \iff 2^*$ $\forall x \in D_f \cap \dot{K}_\delta(x_0)$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(A)$

M: $f(x_0)$ értéke nem befolyásolja $\lim_{x\to x_0} f(x)$-et

Lehet, hogy $x_0 \notin D_f$, de $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$

L: Fgv határértéke (ha létezik) egyértelmű

B.:

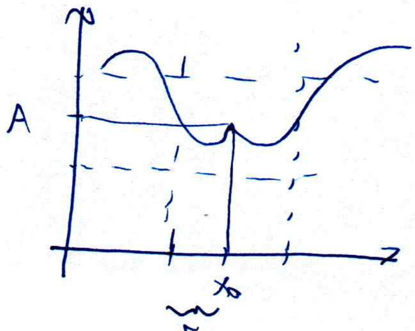
D.: A az f-nek x_0-ban a baloldali határértéke
jobboldali

$\lim_{x\to x_0 \pm 0} f(x) = A$, ha
1, $x_0 \in \text{Torl}\left(D_f \cap (-\infty, x_0)\right)$ $(x_0, +\infty)$
2, $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta(\varepsilon)$, ~~hogy~~
$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in D_f$ és
$x_0 - \delta < x < x_0$
$x_0 < x < x_0 + \delta$

Pl: $f(x) = \{x\} \Rightarrow$ nincs határértéke $x_0 = 2$-ben

T.: ((Cauchy))

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy
$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ha
~~$|x_1 - x_2| < \delta$~~
$x_1, x_2 \in \dot{K}_\delta(x_0)$



Anal ea

2021.10.13
1

Műveletek függvényekkel – műveleteket PONTONKÉNT végezzük el

$$(c\cdot f)(x) = c\cdot f(x)$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Kompozíció:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x));$$

T.: Legyen $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ és $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$

$(x_0 \in (\text{Tor} D_f \cap \text{Tor} D_g))$

Ekkor igaz, hogy

① $\exists \lim_{x\to x_0} (c\cdot f)(x) = c\cdot A$

② $\exists \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = A+B$

③ $\exists \lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = A\cdot B$

④ $\exists \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$

Biz: átviteli elvvel

② $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall x_n \to x_0\,,\ \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

$\lim_{x\to x_0} g(x) = B \iff \forall x_n \to x_0\,,\ \exists \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$

$\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A+B$ ✓

$(f(x_n)+g(x_n))$

A többi állítás is így vezethető vissza sorozatokra

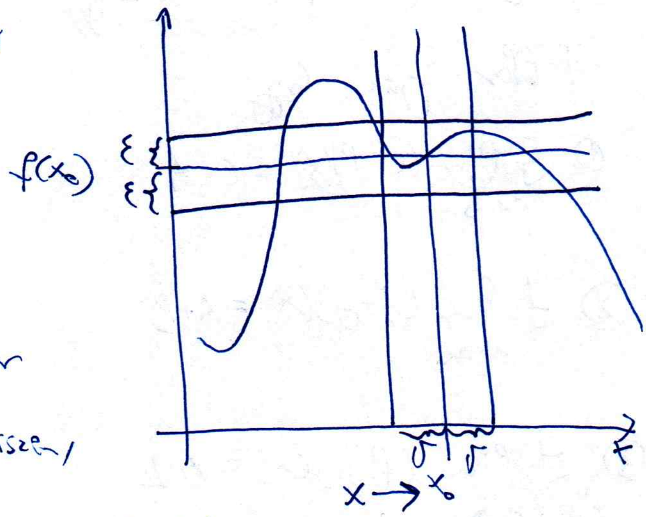
Folytonosság

D.: Legyen $x_0 \in D_f$ f folytonos az x_0 pontban, ha

$\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha

$|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \in D_f$



M.: Ha $x_0 \in D_f \setminus \text{Tor } D_f$, akkor f folytonos x_0-ban. Persze, hiszen, ha $x_0 \notin \text{Tor } D_f$, akkor $\exists \delta > 0 : K_\delta(x_0) \cap D_f = \{x_0\}$

L.: Ha $x_0 \in D_f \cap \text{Tor } D_f$, akkor f folyt. x_0-ban $\iff$

$\iff \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Anal ea

2021. 10. 13
2

B.: A két def. összekötése

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$$

D: f balról folytonos x_0-ban, ha

$\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D_f$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

jobbról

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

L.: Legyen x_0 a D_f belsejében $(\exists \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D_f)$
balról folytonos x_0-ban $\iff \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$
jobbról —— " —— $\iff f(x_0 + 0) = f(x_0)$

T.: Ha f, g folytonos x_0-ban, akkor $c \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$, $g(x_0) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos x_0

B.: Határértékre tanult számolási szabály alapján

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

T.: Ha g folytonos x_0-ban és f folytonos $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g$ folytonos x_0-ban

B.: ? TRIVIÁLISCH!

Pl.: $f(x)=c \quad (c\in\mathbb{R})$ mindenütt folytonos

$\forall \varepsilon$-hoz létezik $\delta(\varepsilon)>0$ jó

Pl: $f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$-ben folytonos

$\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ jó

$\Rightarrow$ $x\cdot x=x^2$ is folytonos

$\Rightarrow$ minden $n\in\mathbb{N}$-re x^n folytonos

$\Rightarrow$ $\forall\, p(x)$ polinom folytonos

polinomok

$\Rightarrow r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ $\quad D_r=\mathbb{R}\setminus\{q$ zérushelyei$\}$

abszolútérték

Tétel: sin, cos, tg, ctg, ln, lg, stb... $|\;|$

az értelmezési tartományban $\forall$ pontjában folytonosak

Szakadási helyek osztályozása

A szakadásokat $\text{Torl}\, D_f$ pontjaiban vizsgáljuk

D.: f szakad

D: $x_0\in \text{Torl}\, D_f$ az f-nek elsőfajú szakadási helye, ha

f szakad x_0-ban és létezik $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\in \quad\quad\quad\quad \in$

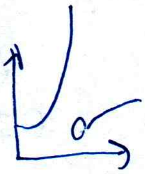
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\mathbb{R} \quad\quad\quad\quad \mathbb{R}$

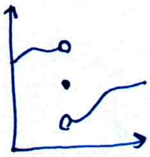
Anal ea

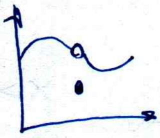
2021. 10. 13
3

Szakadási hely?

elsőfajú

másodfajú 

véges ugrás 

megszüntethető: 

D.: x_0 elsőfajú szakadási hely véges ugrás típusú, ha ~~f(x₀+0)~~

$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$

D.: x_0-ban $f(x)$-nek megszüntethető szakadása van, ha x_0 szakadási hely és $\exists f(x_0+0) = f(x_0-0)$

D.: f-nek x_0-ban másodfajú szakadása van, ha f szakad x_0-ban és a szakadás nem elsőfajú

(lényeges szakadás)

Pl.: $f(x) = \frac{x^2-x-20}{|x^2-12x+35| \cdot (x+4)}$

Hol folytonos? Hol milyen szakadása van?

$f(x) = \frac{(x-5)(x+4)}{|(x-7)(x+5)|(x+4)}$

• f a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{7, 5, -4\}$ $\forall$ pontjában folytonos, mert folytonos függvények összege, szorzata, hányadosa mindig folytonos?

$\boxed{x_0 = -4}$ ⇒ lehet egyszerűsíteni

$f(x) = \frac{x-5}{|(x-7)(x+5)|}$ ← értelmezve van -4-ben

$$\lim_{x \to -4+0} \frac{x-5}{|(x-7)(x+5)|} = \frac{-4-5}{\dots} = -\frac{1}{11}$$

$$\lim_{x \to -4-0} \dots = -\frac{1}{11}$$

$x_0 = -4$-ben megszüntethető szakadás van

$\boxed{x_0 = 7}$

$$\lim_{x \to 7 \pm 0} \frac{\overset{\to 2}{x-5}}{\underset{\downarrow\, 0 \pm 0}{|x-7|}\,\underset{\searrow 2}{|x-5|}} = \text{"}\frac{+1}{0+0}\text{"} = +\infty$$

Másodfajú szakadás

$\boxed{x_0 = 5}$

$$\lim_{x \to 5+0} \frac{x-5}{|x-7|\,|x-5|} \overset{x>5}{=} \lim_{x \to 5+0} \frac{1(x-5)}{\cancel{|x-7|}(x-5)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 5-0} \frac{x-5}{|x-7|\,|x-5|} \overset{x<5}{=} \lim_{x \to 5-0} \frac{-1\cdot(\cancel{x-5})}{|x-7|\,(\cancel{5-x})} = \lim_{x \to 5-0} \frac{-1}{|x-7|} =$$

$= -\frac{1}{2}$ Véges ugrás típusú határérték

Pl.:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{9+x}-3} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" alak}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{9+x}+3)}{\cancel{9}+x-\cancel{9}} = \lim_{x \to 0} \sqrt{9+x}+3 =$$

$= 3+3 = \underline{\underline{6}}$

Anal ea

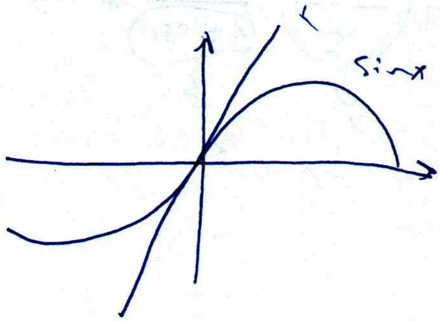
2021. 10. 18
1

Egy fontos határérték

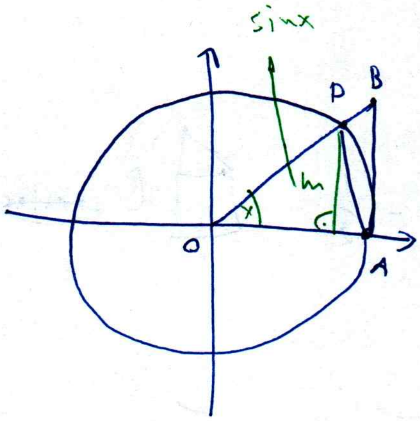
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=f(-x)$$



Biz: Tfh $0<x<\frac{\pi}{2}$



$$T_{OAP\triangle} \le T_{OAP\sphericalangle} \le T_{OAB\triangle}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot \sin x \le \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot x \le \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot tg\, x \quad /:\sin x$$

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \quad /x\to 0+$$

Polizei

$$1 \le \quad 1 \quad \le 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{1}=1$$

Pl: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{2x}{5x}}_{=\frac{2}{5}}\cdot\underbrace{\frac{5x}{\sin 5x}}_{1}=\frac{2}{5}$$

M.: Ha $|x|\ll 1$, ~~akk~~ akkor

$$\sin x \approx x$$

Pl $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

a, $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{\overset{\sin^2 x}{\overbrace{1-\cos^2 x}}}{x(1+\cos x)} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\overset{\to 0}{\sin x}}{1+\cos x}}_{\to 2} \to 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$

b, $\left.\begin{array}{l} 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} \nearrow 1+\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha \\ \searrow 1-\cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha \end{array}$

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{\cancel{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cancel{2}\cdot\frac{x}{2}} = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}_{\to 1} \underbrace{\sin x/2}_{\to 0} \to 0$$

Pl $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\boxed{a}}{=} \lim \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

B ~~valami~~

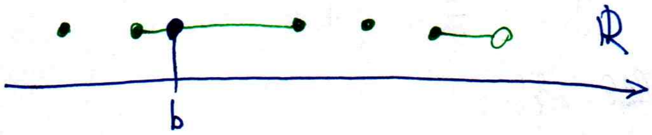
Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

(Kom Hal foly függ tul)

a, Topológiai alapfogalmak

Legyen $H \subset \mathbb{R}$

D.: $b \in H$ a H belső pontja, ha $\exists \varepsilon > 0,\ \overbrace{(b-\varepsilon, b+\varepsilon)}^{K_\varepsilon(b)} \subset H$

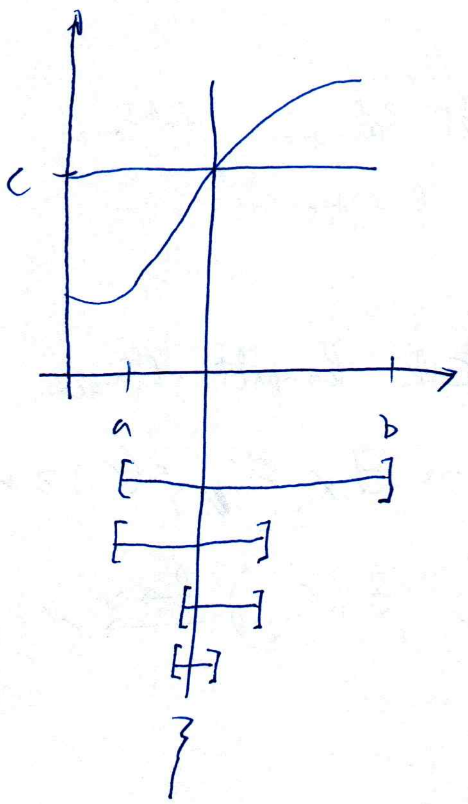


Anal. ea

Ha $f(m_0)=c \Rightarrow$ KÉSZ $\quad \xi = m_0$

Ha $f(m_0)<c$, akkor $I_1=[m_0, b_0]$

Ha $f(m_0)>c$ akkor $I_1=[a_0, m_0]$



Áll.: $f(a_n)<c<f(b_n)$

$m_n=\frac{a_n+b_n}{2}$, ha $f(m_n)=c \Rightarrow \xi=m_n$

Ha $f(m_n)<c \Rightarrow I_{n+1}=[m_n, b_n]$

Ha $f(m_n)<c \Rightarrow I_{n+1}[a_n, m_n]$

M.: ξ nem egyértelmű

Alkalmazás: polinom gyökkeresése

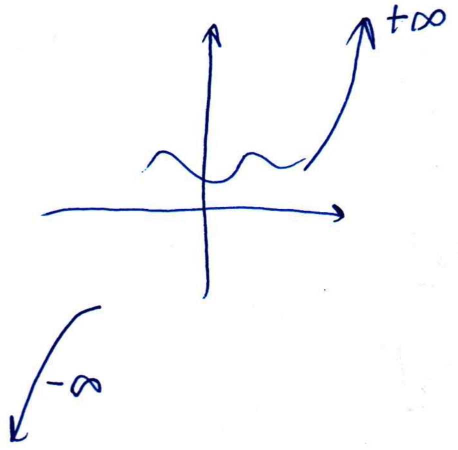
L.: Ha $p(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\dots$

páratlan fokú valós polinom, akkor $\exists\, \xi\in\mathbb{R}: p(\xi)=0$

B.: Legyen $a_{2n+1}>0$

$\lim_{x\to\pm\infty} p(x)=\pm\infty \Rightarrow \exists\, \Omega>0;\ p(\Omega)>0$

$p(-\Omega)<0$



T.: (WEIERSTRASS 1.) Kompakt halmazon folytonos függvény korlátos

Biz.: Indirekt TFH f folyt. a $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmazon, de felülről nem korlátos. Tehát $\forall n \in \mathbb{N}$-re $\exists x_n \in K$, $f(x_n) \geq n$

K kompakt, tehát (x_n) korlátos $\overset{B-W}{\Longrightarrow} \exists (x_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} x^*$ konvergens részsorozat

K kompakt

Anal 1 ex

2021. 10. 20
1

Emlék: (W-1) kompakt (korlátos, zárt) halmazon folytonos függvény korlátos

T.: (W-2) kompakt halmazon folytonos függvény felveszi infimumát és supremumát

$D_f = K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f: K \to \mathbb{R}$ folyt

$$m := \inf\{f(x) \mid x \in K\} \in \mathbb{R}$$
$$\wedge\!\!\text{I}$$
$$M := \sup\{f(x) \mid x \in K\} \in \mathbb{R}$$

$\leftarrow$ W-1 és Dedekind tétel miatt

$\exists x_1 \in K: f(x_1) = m$

$\exists x_2 \in K: f(x_2) = M$

B.: x_2 létezését igazoljuk

Indirekt TFH $\forall x \in K: f(x) < M$ (nem egyenlő) $(*)$

Legyen $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ $(*)$ miatt g nevezője pozitív $\to$

$\to$ g folytonos $\overset{W-1}{\underset{g\text{-re}}{\Longrightarrow}}$ $\underset{\text{korlát}}{\exists T} \in \mathbb{R}: \forall x \in K \ |g(x)| \leq T$

$0 < g(x) \leq T$ $\quad 0 < \dfrac{1}{M - f(x)} \leq T \iff M - f(x) \geq \dfrac{1}{T} > 0$

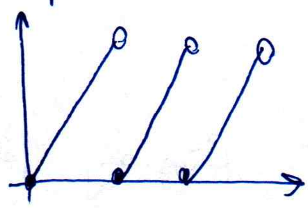
$f(x) < M - \dfrac{1}{T} = M^*$ $\forall x \in K$-ra $\Rightarrow$

$\Rightarrow M^* < M \to$ felső korlát $\Rightarrow$ M nem sup $\lightning$

M: W-2 ? $\forall$ feltétel?

Pl) $f: [0;2] \to \mathbb{R}$ $x \to f(x) = \{x\}$

kompakt

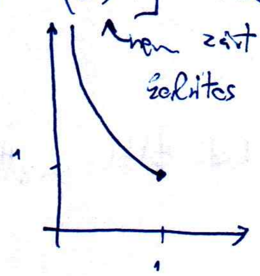


$\sup = 1 \neq f(x)$

f nem folyt

Pl) $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$

nem zárt korlátos

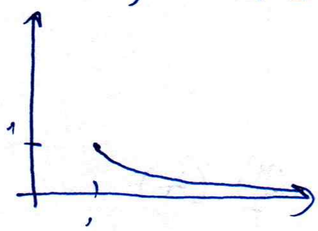


f folyt

$\sup = \infty \neq f(x)$

Pl) $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ $x \to f(x) = \frac{1}{x}$

zárt, nem korlátos



$\inf f = 0 \neq f(x)$

EGYENLETES FOLYTONOSSÁG

és ennek következményei

D: **f egyenletesen folytonos** a $H \subset D_f$ **halmazon**, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $x_1, x_2 \in H \subset D_f$ és $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

H-ra univerzális δ, azaz x_1 és x_2-től független

M: a folytonosság lokális, pontbeli tulajdonság, az egyenletes folytonosság a $H \subset D_f$-re vonatkozik (H általában intervallum)

Anal ea

Ha f a $H \subset D_f$-ben egyenletesen folytonos, akkor

f folytonos $\forall x_0 \in H$-ban

M.: Az egy folytonosság definíciójában szereplő $\delta(\varepsilon)$ jó $\forall x_0 \in H$-ban

Visszafelé nem igaz

f a H $\forall$ pontjában folytonos

$$(\forall x_1 \in H)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x_2 \in D_f)(|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow$$

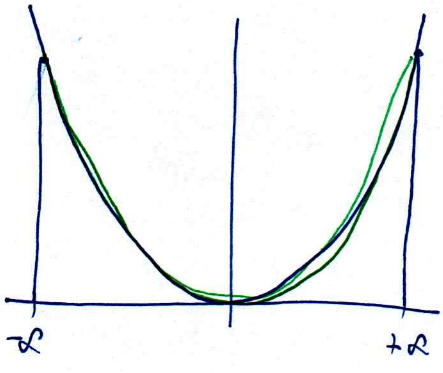
$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

f a H részhalmazon egyenletesen folytonos

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in H): (\forall x_2 \in D_f)(|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Pl: $f(x) = x^2$ a $[-\alpha, +\alpha]$ intervallumon egyenletesen folytonos $\forall \alpha \in [0, \infty]$-re



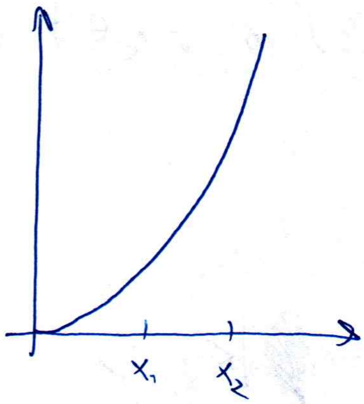
$x_1, x_2 \in [-\alpha, +\alpha]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |x_1^2 - x_2^2| =$$

$$= \underbrace{|x_1 - x_2|}_{<\delta}\underbrace{|x_1 + x_2|}_{2\alpha} < 2\alpha \cdot \delta < \varepsilon$$

ha $\delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$

Pl $f(x)=x^2$ folytonos, de nem egyenletesen folytonos a $[0,\infty)$ halmazon



$$x_{1,n}=n$$

$$f(x)=x^2 \qquad n\in\mathbb{N}^+$$

$$x_{2,n}=n+\frac{1}{n}$$

$$|x_{2,n}-x_{1,n}|=\frac{1}{n}\to 0$$

$$|f(x_{2,n})-f(x_{1,n})|=2+\frac{1}{n^2}>2$$

T.: Heine:

Kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos

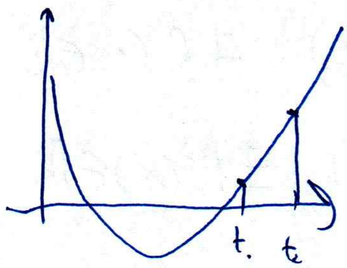
B.: $\emptyset$

Anal ea

2021. 10. 20
3

Valós egyváltozós függvények differenciálása

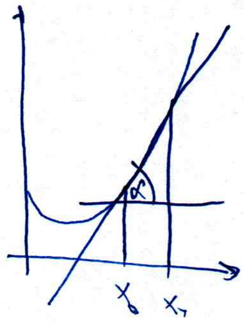
Motiváció: átlagsebesség, pillanatnyi sebesség



$$v_{átlag}(t_1,t_2) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$$

$$v_{pill}(t_2) = \lim_{t_1\to t_2} v_{átl}(t_1, t_2)$$

Def $x_0 \in \operatorname{Int} D_f$ $\quad f: D_f \to \mathbb{R}$



f DIFFERENCIAHÁNYADOSA x_0-ban

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

f deriváltja, differenciálhányadosa

$$f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx} = \dot{f}(x) = \operatorname{tg}\alpha = \text{érintő meredeksége}$$

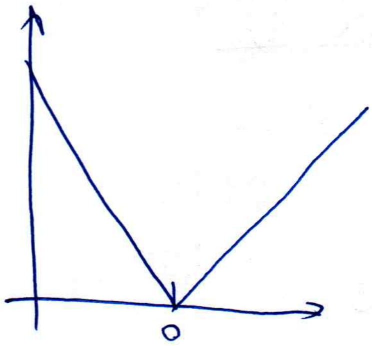
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}$$

f differenciálható x_0-ban, ha ez a limesz létezik, értéke $\in \mathbb{R}$

D: baloldali derivált jobboldali derivált

$$f'_{\mp}(x_0) = \lim_{h\to 0\mp}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x_1\to x_0\mp 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Pl $f(x)=|x|$ $x_0 = 0$-ban



$\nexists f'(x_0)$

$\exists f'_+(x_0) = +1;$

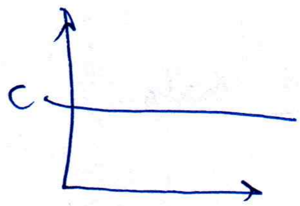
$\exists f'_-(x_0) = -1.$

D.: f deriválható (a,b)-n, ha $\forall x \in (a,b): \exists f'(x) \in \mathbb{R}$

D.: f deriválható $[a,b]$-n, ha $\forall x \in (a,b): \exists f'(x) \in \mathbb{R}$

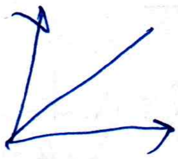
és $\exists f'_+(a)$ és $\exists f'_-(b)$

Pl $f(x) = c \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 0$

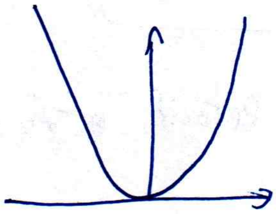


Pl

$f(x) = x$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \underline{\underline{1}}$



Pl $f(x) = x^2$ $f'(x) \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = \underline{\underline{2x}}$



Anal ea

Pe $f(x)=x^n \quad n\in\mathbb{N}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i h^{n-i}-x^n\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\underset{\downarrow\atop 0}{h^{n-1}}+\underset{\downarrow\atop 0}{nxh^{n-1}}+\dots+n\cdot x^{n-1}\right)=\underline{\underline{nx^{n-1}}}$$

Pe $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\sqrt{x+h}+h\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

Pe $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=$$

$$=\frac{-1}{x^2}=-x^{-2}=\left(x^{-1}\right)'$$

T.: $(x^\alpha)'=\cancel{\alpha x^{\alpha-1}}=\alpha x^{\alpha-1} \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha=\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

Deriválási szabályok

<u>T.:</u> Ha f, g deriválható x-ben, akkor

$c\cdot f$, $f+g$, $f\cdot g$, és $g(x)\neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ deriválható x-ben és

1, $(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x)$

2, $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$

3, $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

4, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$

⋮

$\sin x \cos h + \cos x \sin h$

Pl $(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cancel{\lim \frac{1}{h}(\sin x(\cos h - 1}$

$= \lim \left(\sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

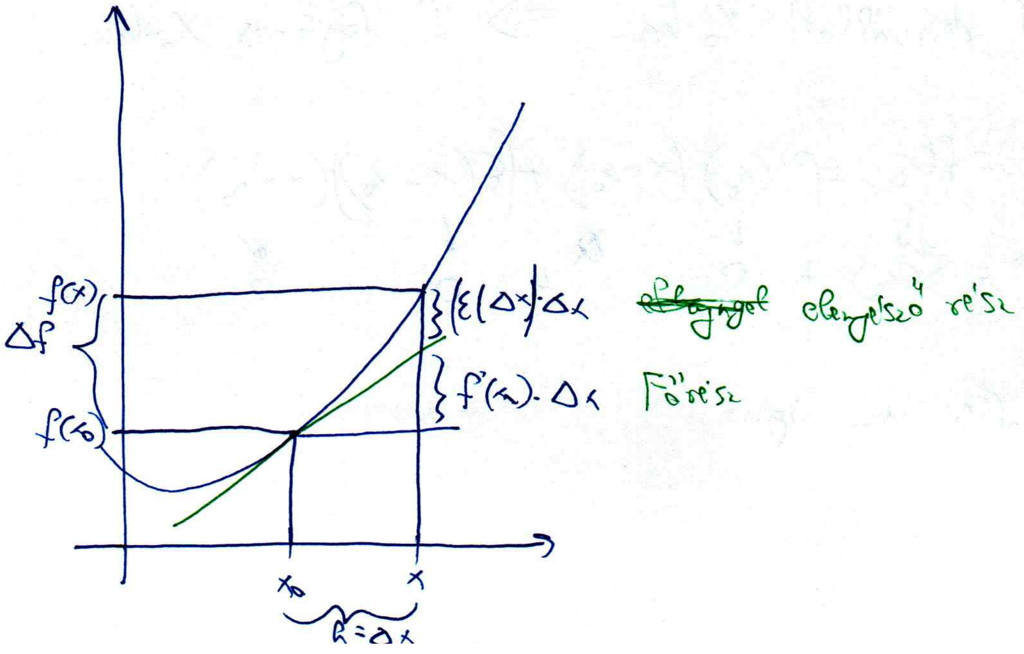
T.: (Szükséges és elégséges feltétel differenciálhatóságra)

Legyen $K_\delta(x_0) \subset D_f$; $(\delta > 0)$: f deriválható x_0-ban $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\Delta f = f(x) - f(x_0) = \overbrace{A \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{h}}^{\text{lineáris rész}} + \overbrace{\varepsilon(\underbrace{x - x_0}_{h}) \cdot (\underbrace{x - x_0}_{h})}^{\text{„elenyésző rész”}}$, ahol

$A \in \mathbb{R}$, x-től független és $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

M.: Ha ~~ezen~~ Δf-nek ez a felírása létezik, akkor itt A egyértelmű, és $A = f'(x_0)$



B.: ($\Rightarrow$) (szükségesség)

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} = A+\varepsilon(h) \quad / \cdot h$$

$$\underbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}_{\Delta f} = A\cdot \underset{x-x_0}{\overset{\shortparallel}{h}} + \varepsilon(h)\cdot h \quad \checkmark$$

B.: ($\Leftarrow$) (elégséges) $\quad$ $*$-t osszuk h-val

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{h} = A+\varepsilon(x-x_0) \quad / x\to x_0$$

$$f'(x_0) = A + 0 \checkmark$$

M.: Többváltozós fgv-k deriváltját $*$-gal deriváljuk (Anal 2)

T.: Ha f deriválható x_0-ban $\Rightarrow$ f folytonos x_0-ban

B.: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (\varepsilon(x-x_0))(x-x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + 0 \quad \cancel{x} \quad 0 \cdot 0$$

M.: visszafelé nem igaz

Anal ea

2021.10.25

2

Függvény differenciálja (elsőrendű ~~ki~~ teljes)

$x_0 \in \mathrm{Int}(D_f)$

D.: Az f elsőrendű differenciálja az x_0 pontban a h növekmény mellett:

$$\boxed{df = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h}$$ (Főrész / lineáris növekmény)

Alkalmazás: Közelítés $\Delta f \approx df$

Pl: $f(x) = x^3$; $x_0 = 4$; $h = \frac{1}{2}$; $f(4{,}5) \approx f(4) + df(4; \frac{1}{2}) =$

$= 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2} = 64 + 24 = 88$

$4{,}5^3 = 91{,}125$

Érintő egyenlete

f grafikonját az $(x_0, f(x_0))$ pontban érinti (zöld egyenese)

$y_é(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$

T.: f, g differenciálható x-ben $\Rightarrow$

1, $\exists (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2, $\exists (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \quad (c \in \mathbb{R})$

3, $\exists (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4, $\exists \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$, ha $g(x) \neq 0$

5, $\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, ha $g(x) \neq 0$

B.: ① $(f+g)'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) + (f+g)(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)}\right) \checkmark$$

② HF

③ $(f\cdot g)'(x) =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) \overbrace{- f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)g(x)}^{0} - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) g(x) =$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$$

④ $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)}=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

⑤ $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x)\overset{③}{=}\left(f'\frac{1}{g}+f\left(\frac{1}{g}\right)'\right)(x)=$$

$$=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

Pl: $$(tg(x))'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}$$

$$(ctg(x))'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}=-\frac{1}{\sin^2x}$$

T.: $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ (~~h mindkét oldala~~)

(~~Léteznek a felírt deriváltak~~)

Ha g deriválható x egy környezetében és f differenciálható $g(x)$-ben

B: (nem precíz)

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{h \to 0 \; g(x+h) \to g(x) \;\to\; f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\to g'(x)}$$

DE $g(x+h) - g(x)$ LEHET NULLA

Precíz $\Delta f = A \cdot f' + \varepsilon(h) \cdot h$

$$\Delta(f \circ g) = \underbrace{f(g(x+h)) - f(g(x))}_{f'(g(x)) \cdot (g(x+h) - g(x)) + \varepsilon_f(\Delta g) \cdot \Delta g} =$$

$$\Delta g = g'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon_g(\Delta x) \cdot \Delta x$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \Delta x + f'(g(x)) \cdot \varepsilon_g(\Delta x) \Delta x + \varepsilon_f(\Delta g) \cdot g'(x) + \varepsilon_g(\Delta x) \Delta x$$

elenyésző rész

Inverz függvény

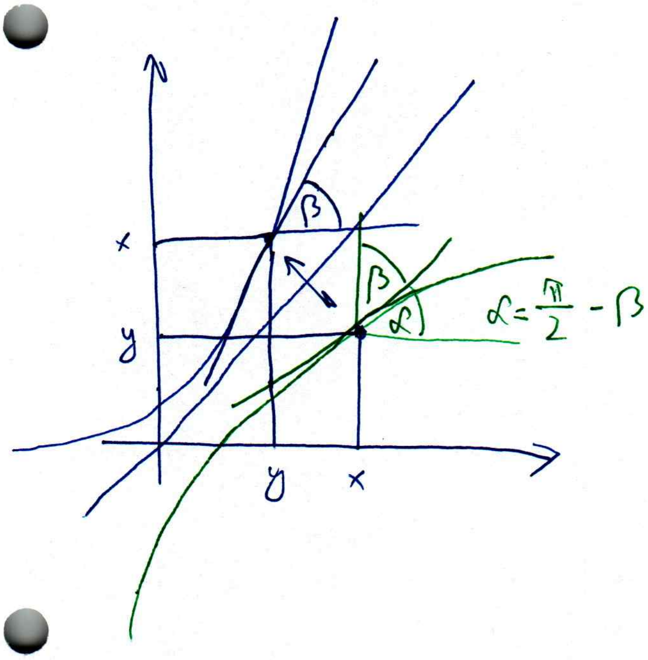
Ha f injektív, akkor invertálható

$f: D_f \longrightarrow \mathrm{Codom}(f)$ injektív

$\cup$

értékkészlet: $R_f = \{ y \mid \exists x : f(x) = y \}$

$f^{-1}: R_f = f(D_f) \longrightarrow D_f : y \longmapsto f^{-1}(y) = x$, amire $f(x) = y$



$y=x$ egyenesre tükrözés

T.: Ha f invertálható és deriválható x_0-ban és $f'(x_0) \neq 0$, akkor f^{-1} deriválható az $f(x_0) = y_0$-ban és $\boxed{(f^{-1})'(y_0) =}$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} = \boxed{\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0 = f^{-1}(y_0)$$

B.: $(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)} =$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

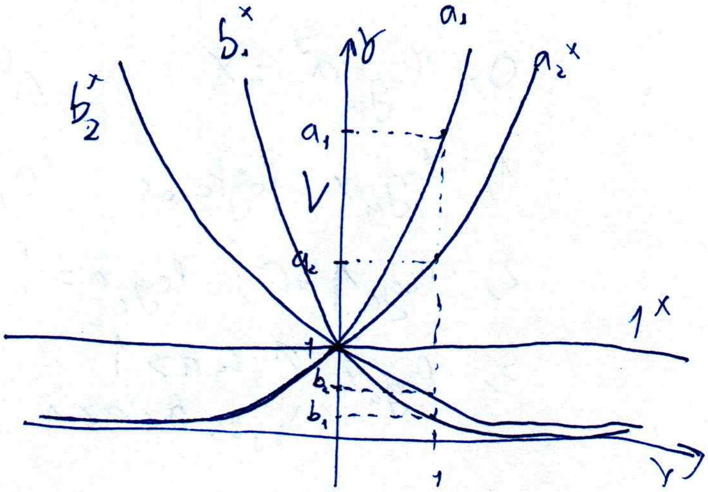
Anal ea

2021.10.27
1

ELEMI FÜGGVÉNYEK

Exponenciális függvények $f_x = a^x \quad a > 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = (0, +\infty)$, ha $a \neq 1$



1, $x \mapsto a^x$ folytonos

2, $a^0 = 1$; $a^1 = a$

3, $x \mapsto a^x$ $\nearrow$, ha $a > 1$

$\equiv 1$, ha $a = 1$

$\searrow$, ha $0 < a < 1$

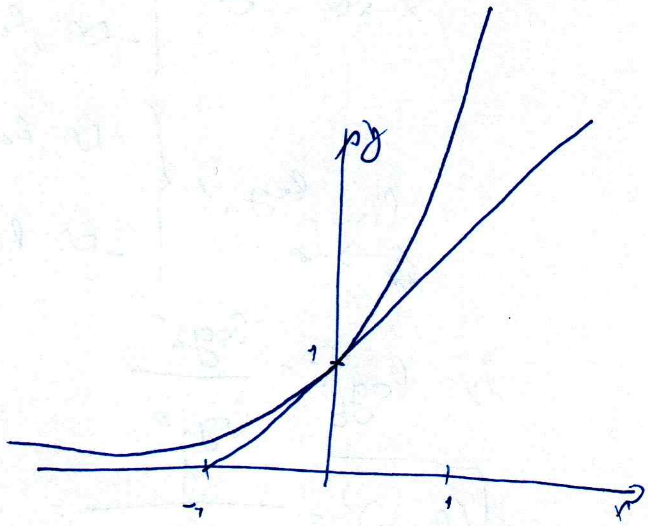
4, $a^{x+y} = a^x a^y$

5, $(a^x)^y = a^{xy}$

6, $\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} +\infty, \text{ ha } a > 1 \\ 0, \text{ ha } 0 < a < 1 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ ha } a > 1 \\ +\infty, \text{ ha } 0 < a < 1 \end{cases}$

Speciális alap $e^x = \cancel{\;} = \exp x$

$\boxed{e^x \text{ meredeksége 0-ban } 1}$



$e \approx 2{,}71$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Logaritmus függvény – exp inverzei

$\log_a : (0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \log_a x = y : a^y = x$

$a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$

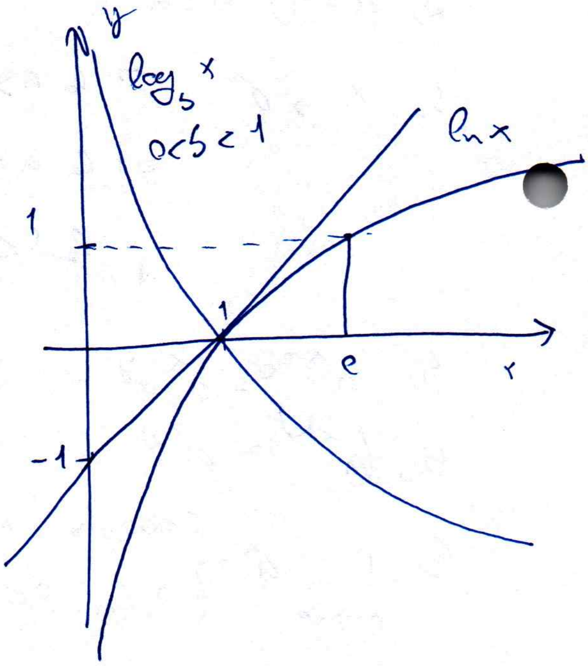
0, $\log_a a^x = x$ $\quad a^{\log_a x} = x$

1, $\log_a x$ folytonos $(0,+\infty)$-en

2, $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$

3, $\log_a x$ $\nearrow$, ha $a > 1$

$\searrow$, ha $0 < a < 1$



4, $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

5, $\log_a (x^y) = y \log_a x$

6, $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x \begin{cases} +\infty, \text{ha } 0<a<1 \\ -\infty, \text{ha } 1<a \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x \begin{cases} +\infty, \text{ha } 1<a \\ -\infty \text{ ha } 0<a<1 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Kef: } (f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

7, $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{(a^x)'} = \left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x\ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a =$$

$\boxed{a = e^{\ln a}}$ $\quad = \boxed{\ln a \cdot a^x}$

Hatvány függvények

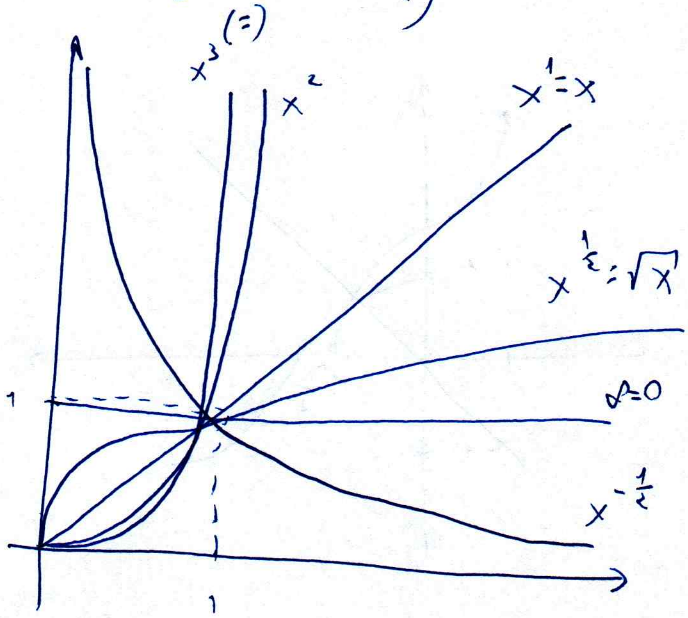
$x \mapsto x^\alpha \quad (x>0,\ x\in\mathbb{R})$

$$\boxed{(x^\alpha)'} = \left(\left(e^{\ln x}\right)^\alpha\right)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' =$$

$$= e^{\alpha \ln x} \alpha \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \boxed{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$\boxed{0^0=1}$

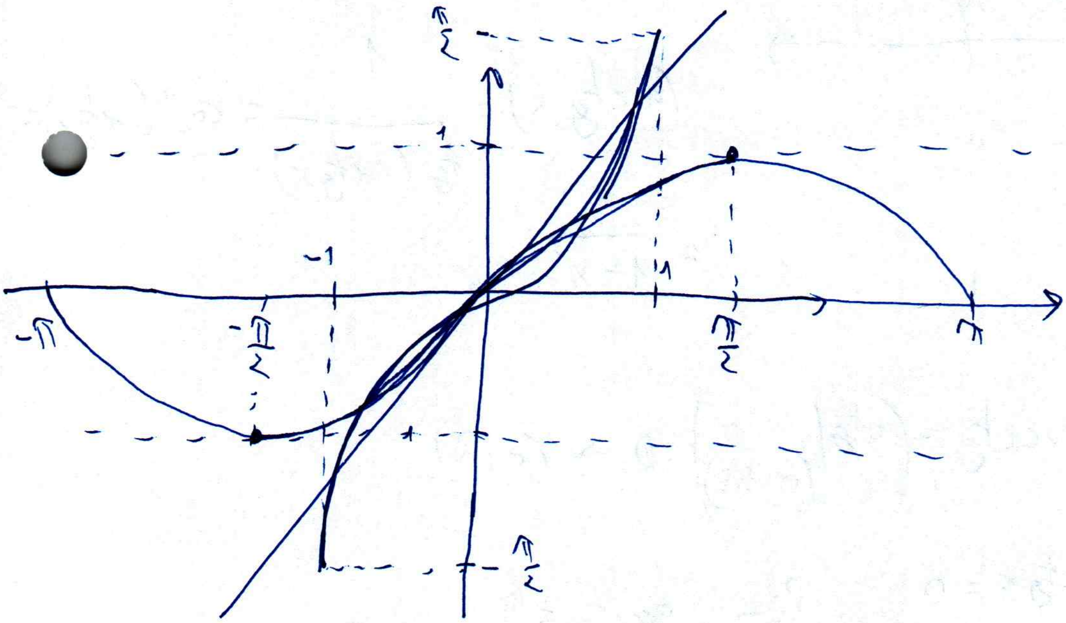


$$\underbrace{(x^x)'} = \left(\left(e^{\ln x}\right)^x\right)' =$$

$$= \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x \ln x} \cdot (x\ln x) = \underbrace{(1+\ln x)\, x^x}$$

Az arc sin x fgv - sin inverze

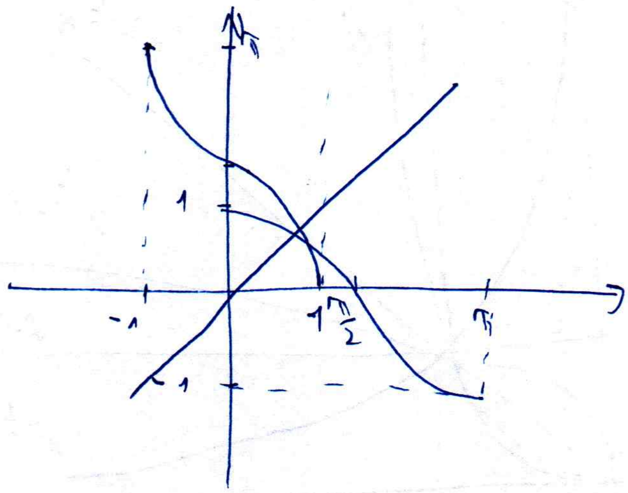
$$\arcsin \left(\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$$



$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\underbrace{\sin'}_{\cos}(\underbrace{\arcsin x}_{\varphi})} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

arc cos x

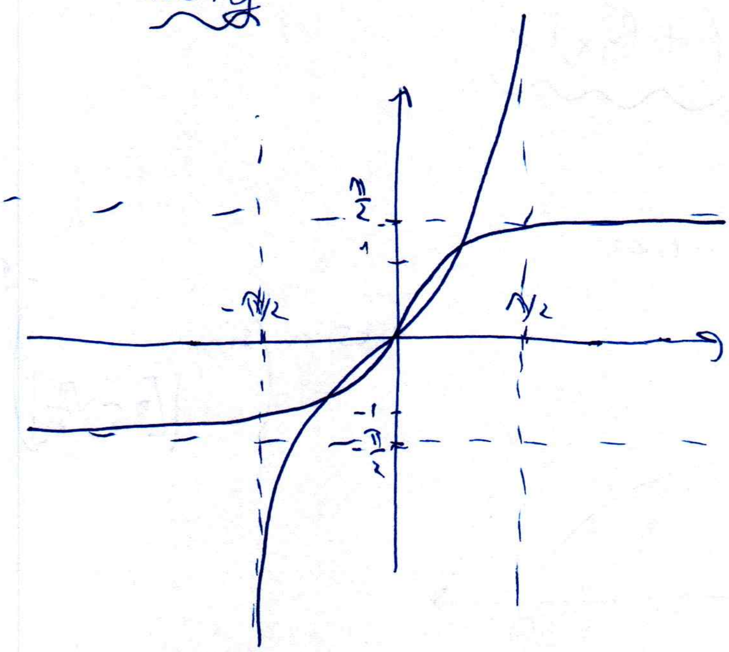
$$\operatorname{arccos} = \left(\cos\Big|_{[0;\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to [0; \pi]$$



$$(\operatorname{arc cos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

arctg

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}\Big|_{(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})}\right)' : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$$



$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

arcctg

$$\operatorname{arcctg} = \left(\operatorname{ctg}\Big|_{(0;\pi)}\right) : \mathbb{R} \to (0; \pi)$$

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arcctg} x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} = \pi$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Anal ea

2021. 10. 27
3

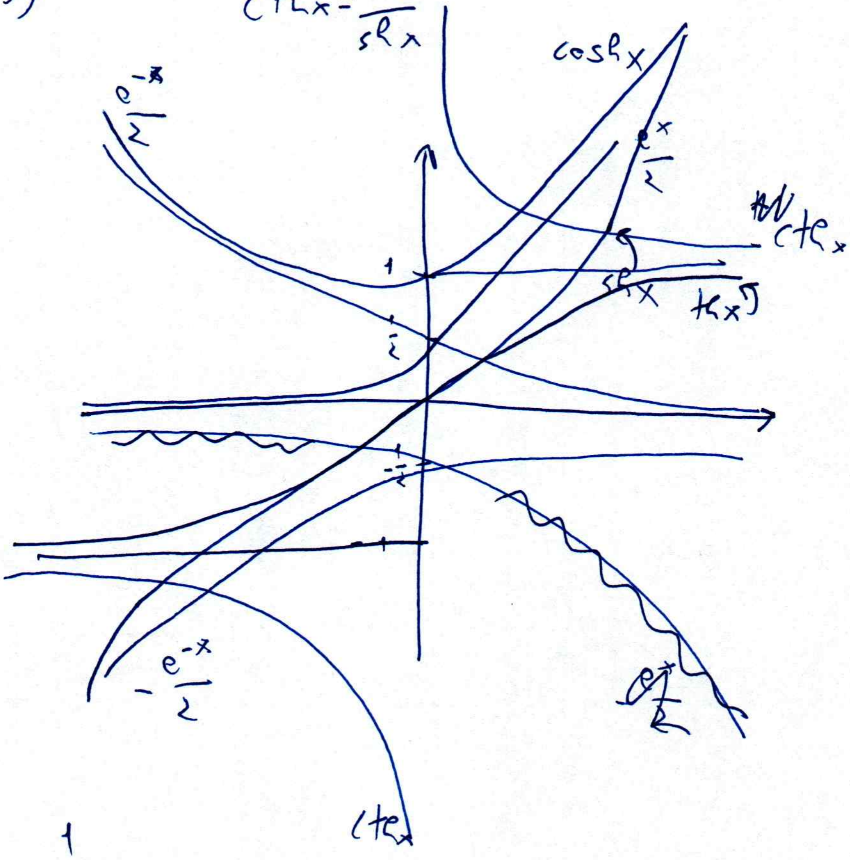
Hiperbolikus függvények sh, ch, th, cth

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{ptl})$$

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x}$$

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{ps})$$

$$cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x}$$



$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

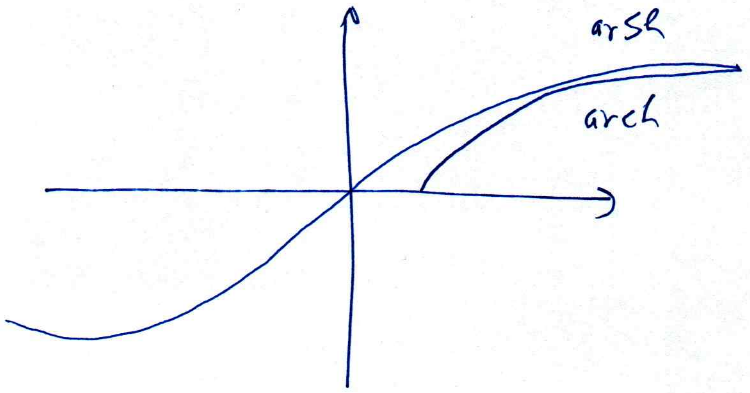
$$(sh\,x)' = ch\,x$$

$$(ch\,x)' = sh\,x$$

$$(th\,x)' = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$(cth\,x)' = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x}$$

Inverz hiperbolikus függvények arsh arch



$arsh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$arch: [1;\infty) \to [0;\infty)$

$(arsh)' =$

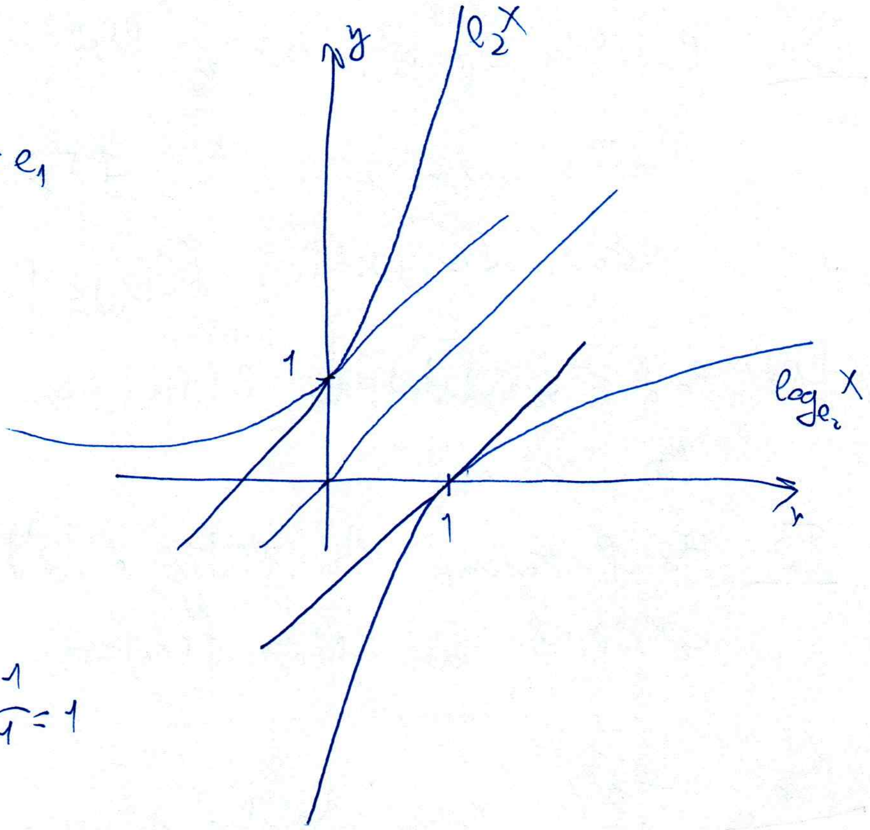
e két definíciója

1, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e_1$

2, $\left.\frac{d}{dx} e_2^x\right|_{x=0} = 1$

$\Updownarrow$

$\left.\frac{d}{dx}\log_{e_2}x\right|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$



$\left.\left(\log_{e_2}x\right)'\right|_{x=1} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\log_{e_2}(1+h)-0}{h} = 1$

Legyen $h=\frac{1}{n}$, $h\to 0 \iff n\to\infty$

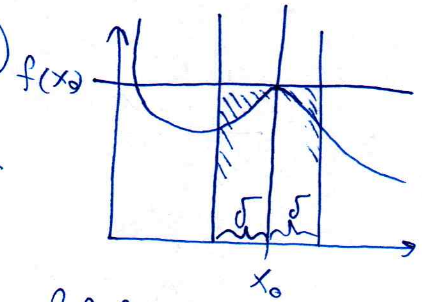
$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\log_{e_2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\log_{e_2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \iff e_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e_2$

$e_1 = e_2$

A Differenciálszámítás középérték tételei

D: f-nek a D_f ért. tart egy felső x_0 pontjában lokális maximuma van, ha $\exists \delta > 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$

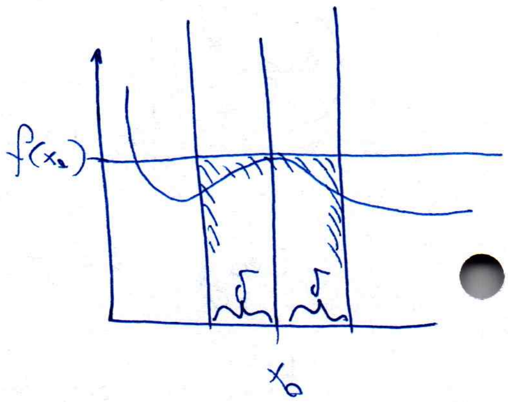


D: lokális szélsőérték, ha lokális minimum vagy maximum.

T: Ha f x_0-ban deriválható, és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$

Biz: T.f.h. x_0-ban lokális maximum van

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$



Ha $|h| < \delta$, akkor $f(x_0+h) \leq f(x_0)$

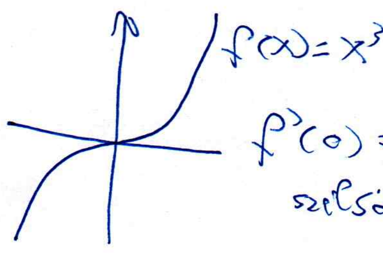
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Ha $|h| < \delta$, akkor $f(x_0+h) \leq f(x_0)$

De $\exists f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

M: Kell a deriválhatóság

M: Visszafelé nem igaz



$f'(0) = 0$, de $\not\exists$ lokális szélsőértéke

Anal ea

2021.11.03

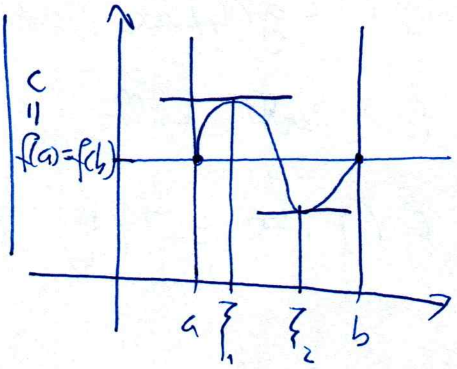
2

T.: (Rolle)

Ha f folytonos ~~egy~~ $[a,b]$-n és f folytonos (a,b)-n és

$f(a)=f(b)$ $\Downarrow$

$\exists\, \xi \in (a,b): f'(\xi)=0$

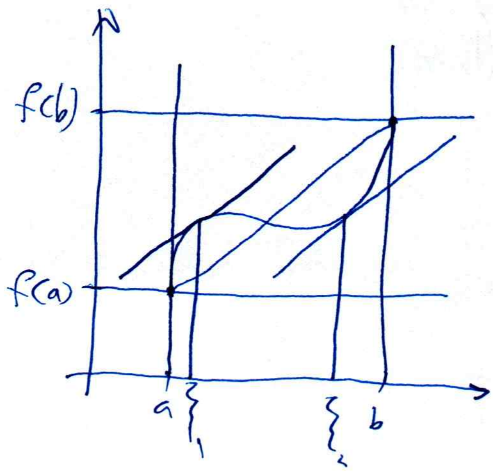


Biz.: W2 szerint f felveszi szélsőértékeit $[a,b]$-n

- Ha mindkét szélsőértéket (min és max) a végpontokban veszi fel $\Rightarrow f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0 \ \forall x \in (a,b)$
- Ha f valamelyik szélsőértéket belső pontban veszi fel, akkor $\exists\, f'(\xi)=0$ (előző tétel)

T.: (Lagrange)

Ha f folytonos $[a,b]$-n, diffható (a,b)-n $\Big\} \Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (a,b)$, melyre $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\leftarrow$ húr meredeksége



Bf

Bi: Húr egyenlete $h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

$h(a) = f(a)$; $h(b) = f(b)$

$g: f-h$ – folytonos $[a,b]$-n

$g(a) = g(b) = 0$ diffható (a,b)-n

g-re ~~~~ Rolle

$g'(\xi) = 0 = f'(\xi) - h'(\xi) = 0$ ✓

Pé: Igazoljuk hogy $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ esetén

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < tg\, b - tg\, a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

ötlet: $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Lagrange-tétel tg-re $[a,b]$-n

$$\exists \xi \in (a,b): tg'(\xi) = \frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{tg\, b - tg\, a}{b-a}$$

$\cos x \searrow [0,\frac{\pi}{2}]$-n $\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \nearrow [0,\frac{\pi}{2}]$-n $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} < \underset{\frac{tg\, b - tg\, a}{b-a}}{\underset{\parallel}{\frac{1}{\cos^2 \xi}}} < \frac{1}{\cos^2 b} \quad / \cdot (b-a)$$

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < tg\, b - tg\, a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

Anal ea

2021.11.03

3

T.: (L'Hospital szabály)

Legyen f, g differenciálható $\dot{K}_\delta(x_0)$-ban $(\delta > 0)$

:M $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ és $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

Ekkor ha $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, ekkor $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$

B.: $\emptyset$ (jegyzet)

M.: x_0 lehet $\pm\infty$, $x_0 \pm 0$ is ; β lehet valós vagy $\pm\infty$

Hogyan alkalmazzuk?

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ – L'H közvetlenül alkalmazható

$0 \cdot \infty$ – $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$

$\infty - \infty$: $f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}$

$f(x)^{g(x)} \to e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$

Ha határozatlan $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Pl) $\lim_{x \to \infty} \underset{\infty}{x^2} \underset{0}{e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Pl) $\lim_{x \to 1 \pm 0} \underset{0 \pm 0}{\ln x} \, \underset{\mp\infty}{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{ctg\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \cdot \frac{\pi}{2}} =$

$= \lim_{x \to 1} -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 x}{x} = -\frac{2}{\pi}$ ← DAS IST GUT!!!

Pe| $\lim\limits_{x\to\infty} \cancel{x}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2}\cdot \alpha\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x}}$

$= \alpha$

Pe| $\lim\limits_{x\to 0^{\pm 0}} \left(\underset{\pm\infty}{\frac{1}{x}} - \underset{\pm\infty}{\frac{1}{e^x-1}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \overset{"\frac{0}{0}"}{\underset{L'H}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x} \overset{"\frac{0}{0}"}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$

Pe| $\lim\limits_{x\to 0} (\underbrace{\cos 3x}_{e^{\ln\cos 3x}})^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos(3x))}{x^2}} = e^{-\frac{9}{2}}$ ←

exp fgv. folytonosság

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{x^2} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos(3x)}\right)\left(\frac{\sin(3x)}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos(3x)}\right)\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3\right) = -\frac{9}{2}$

Pe| $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(3x)}{e^{3x}} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{3}\operatorname{ch}(3x)}{\cancel{3}e^{3x}} \underset{L'H}{=} \lim \frac{\cancel{3}\operatorname{sh}(3x}{\cancel{3}e^{3x}}$ ← NICHT GUT, DA ES WEGGELEN IST

$\frac{\operatorname{sh}(3x)}{e^{3x}} = \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2e^{3x}} = \frac{1-e^{-3x}}{2} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{2}$

Anal ea

2021.11.03
4

Pl $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Pl $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty}$

Nyílt intervallumon diff-ható FGV-ek

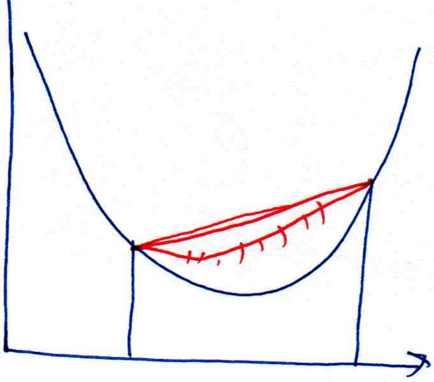
$I=(a,b)$, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$

D.: f monoton nő (csökken) I-n, ha $a<x_1<x_2<b \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ($\geq$)

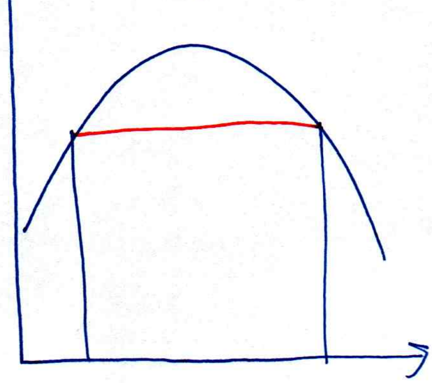
f szigorú monoton nő (csökken) I-n, ha $a<x_1<x_2<b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($>$)

D.: f alulról konvex I-n, ha $\forall x_1,x_2 \in (a,b): f(x) \leq h_{(x_1,x_2)}(x)$ $\forall x \in [x_1,x_2]$

Konvex



Konkáv



D.: f-nek ~~inflexiós pontja~~ x_0-ban inflexiós pontja van, ha folytonos és konkávból konvex vagy konvexből konkáv

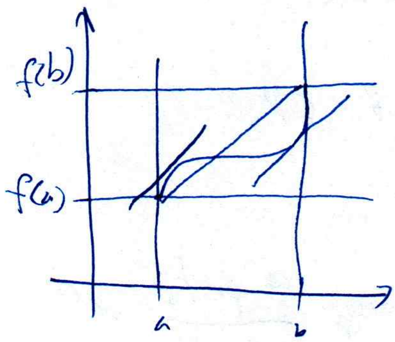
T.: f monoton nő $\Leftarrow\Rightarrow f' \geq 0$ | f monoton csökken $\Leftarrow\Rightarrow f' \leq 0$

f szig. monoton nő $\Leftarrow f' > 0$ | f szig. monoton csökken $\Leftarrow f' < 0$

T.: ?

Emlék: (L-T)

Ha f folytonos ~~[x_1, x_2]~~ $[a,b]$-n, diffható (a,b)-n, akkor



$\exists\, x \in (a,b)$

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

L.: f folytonos $[a,b]$-n, diffható (a,b)-n és $\forall x \in (a,b)$:

$: f'(x) = 0$

Ekkor $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]$ $f(x) = c$

M.: Fontos, hogy összefüggő halmazon áll fenn (*)

B.: $x_1, x_2 \in [a,b]$ (L-T)

$$\exists x \in (x_1, x_2): \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x) \overset{(*)}{=} 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

T.: (Integrálszámítás alaptétele)

f, g folytonos $[a,b]$-n, diffható (a,b)-n és $f' = g'$ az (a,b)-n

Ekkor $\exists c \in \mathbb{R}$: $f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in [a,b]$

B.: $h = f - g \Rightarrow h' = f' - g' = 0$

Az előző ~~a~~ lemma alapján $h(x) = c \in \mathbb{R}$

T.: Ha f diffható I-n (I nyílt intervallum), akkor

1, f monoton nő I-n $\Longleftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

2, f szigorúan monoton nő I-n $\Longleftarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

3, f monoton csökken I-n $\Longleftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in R$

4, f szigorúan monoton csökken I-n $\Longleftarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in R$

B.:

1, $(\Longrightarrow)$ $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\text{nemnegatív}}{\text{pozitív}}$ vagy $\dfrac{\text{nempozitív}}{\text{negatív}} \geq 0$

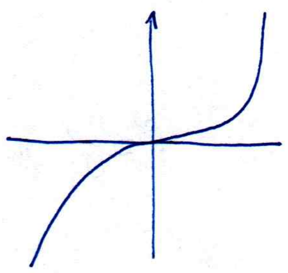
$(\Longleftarrow)$ Legyen $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I$ (L-T)

$\exists \xi \in (x_1, x_2): \; 0 \leq f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ ✓

2, $(\Longleftarrow)$ Hasonlóan $x_1 < x_2 \in I$

$\exists \xi \in (x_1, x_2): \; 0 < f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$

M.: 2 $(\Longrightarrow)$ nem igaz $\quad f(x) = x^3$



$f'(x) = 3x^2$

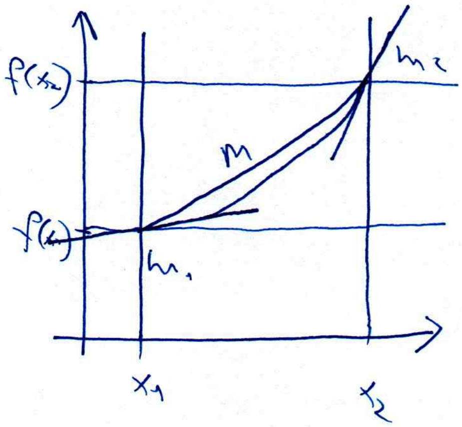
0-ban $3x^2 = 0$

T.: Legyen f diffható I-n (nyílt int)

Akkor 1, f' monoton nő I-n $\Longleftrightarrow f$ konvex I-n

2, f' monoton csökken I-n $\Longleftrightarrow f$ konkáv I-n

B: 1, ($\Leftarrow$) $x_1 < x_2$ $x_1, x_2 \in I$

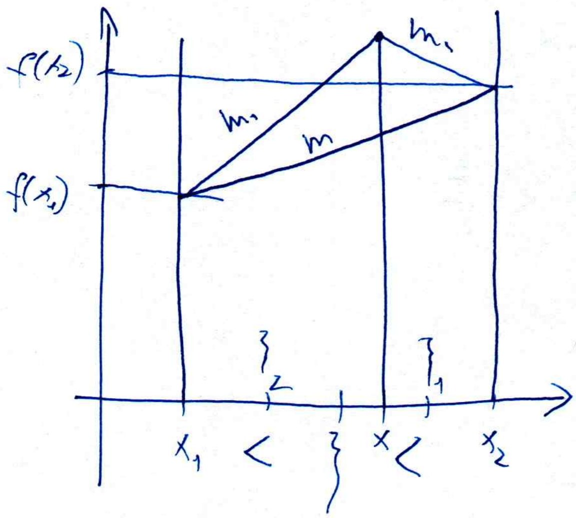


$$m_1(x) \le m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le m_2(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

$$\downarrow$$

$$f'(x_1) = \quad m \quad \le f'(x_2) \checkmark$$

1 ($\Rightarrow$) $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$. $f'(x_1) \le f'(x_2)$



$$m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow L\text{-}T \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} \exists \xi \in (x_1, x_2),\ f'(\xi) = m \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x_1) \le f'(\xi) = m \le f'(x_2) \end{array} \right) \text{NEM KELL}$$

Indirekt: TFH $\exists x \in (x_1, x_2)$: $f(x) >$ húr

L-T: $\exists \xi_1 \in (x_1, x) : f'(\xi_1) = m_1$

$\exists \xi_2 \in (x, x_2) : f'(\xi_2) = m_2$

De $m_1 = f'(\xi_1) > m_2 = f'(\xi_2)$ és $\xi_1 < \xi_2$ $\lightning$

T.: Ha f kétszer differenciálható I-n, akkor

1, $f''(x) \ge 0 \iff f$ konvex I-n

2, $f''(x) \le 0 \iff f$ konkáv I-n

$\boxed{\text{Pl}}$ $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x$

monotonitás, konvexitás?

$\exists f', f''$ $\mathbb{R}$-en

$f'(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$

x	$x<1$	1	$1<x<6$	6	$6<x$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$

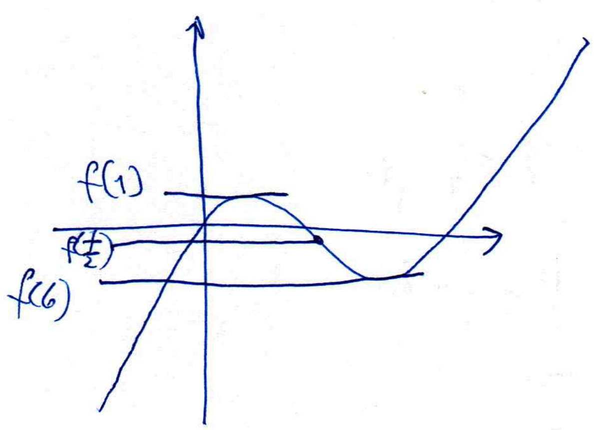
f szigorúan monoton nő $(-\infty, 1]$ és $[6, +\infty)$

f szigorúan monoton csökken $[1, 6]$-on

Konvexitás $f''(x) = 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

x	$x<\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}<x$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$ kv	inflexiós pont	$\cup$ kx

Grafikon ~~(x tengely nélkül)~~



Anal ea

2021.11.08

3

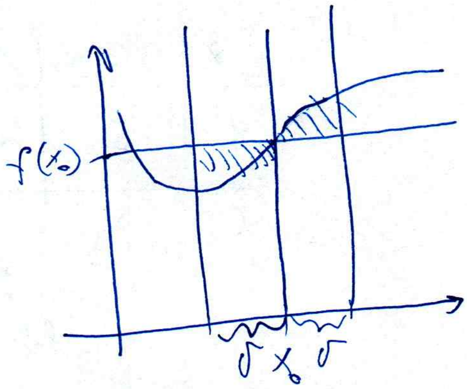
Diffható függvények lokális tulajdonságai

D: f az x_0-ban lokálisan növekedő, ha

Ha $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x_0 - \delta < x \leq x_0$ esetén

$f(x) \leq f(x_0)$ és $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$ esetén

$f(x_0) \leq f(x)$



L: Tfh f diffható x_0-ban, ekkor

1, f lokálisan nő x_0-ban, $\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

2, f lokálisan nő x_0-ban $\Leftarrow f'(x_0) > 0$

B.:

1, $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ ✓

2, $\exists \delta > 0$, hogy $\forall h \in (-\delta, \delta)$: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x)}{h} > 0 \Rightarrow$ f lokálisan nő x_0-ban

M.: Hasonló lokális csökkenésre

M.: Visszafelé implikációk nem igazak

T.: Legyen x_0 a D_f és $D_{f'}$ belső pontja

f-nek x_0-beli lokális szélsőértékének

1. Szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$ ✓ (volt)

2, Elégséges feltétele

a, $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0-ban

b, $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$

B.:

1, volt ✓

2, a, Tfh f' ~~v~~ az x_0-ban ... vált

x	$x<x_0$	x_0	$x_0<x$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

lok. min.

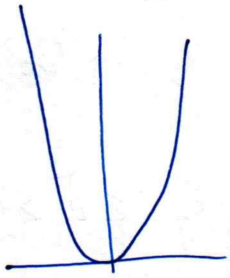
b, Tfh $f'(x_0)=0$, és $f''(x_0)>0 \Rightarrow f'$ lok és x_0-ban

$\Rightarrow f'$ előjelet vált x_0-ban

M.: 2.b elégséges (és 2.a elégséges)

Pl $f(x)=x^4$ $\quad f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$

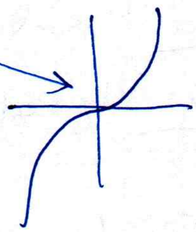
lokális minimum.



$g(x)=x^3$ $\quad g(0)=g'(0)=g''(0)=0$

$g'''(0)>0$

nincs lok. sz. é.



Függvényvizsgálat lépései

1 Df, zérushely, periodicitás, szimetriák, paritás, szakadási helyek, határértékek

2, Monotonitás (f' előjele)

3, Konvexitás (f'' előjele)

(4, Lineáris aszimptota)

5, R_f, grafikon

Implicit deriválás

$x \mapsto y$ explicit kapcsolat $y(x) = \ldots$

implicit kapcsolat $\phi(x,y)=0$

__Feladat:__ implicit kapcsolatmegadás esetén $y'(x)=?$

__Pel__ $y(x)$ kétszer folytonosan deriválható és átmeg az $(x_0,y_0)=(0,1)$ ponton és teljesíti a $y+x\ln y+2x^2-x+\ln(1+x)=1$ $(*)$

Milyen lokális tulajdonságai vannak $y(x)$-nek $x_0=0$-ban?

$(y'(x_0)=?,\ y''(x_0)=?)$

$y(x)$ nem fejezhető ki $(*)$-ből

$(0,1)$ pontban $1+0+0-0+0=1$ ✓

~~(x_0)-ban $y=f$~~ ??

$$y(x)+x\ln y(x)+2x^2-x+\ln(1+x)=1 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$y'(x)+\ln y(x)+\frac{y'(x)}{y(x)}+4x-1+\frac{1}{1+x}=0$$

$\frac{d}{dx}$ (x_0, y_0) helyen $y'(0)+0+0-1+1=0$

$y'(0)=0 \Rightarrow$ lehet szélsőérték

$$y''(x)+\frac{y'(x)}{y(x)}+\frac{y'(x)}{y(x)}+x\,\frac{y''(x)\,y(x)-y'^2(x)}{y^2(x)}+4-\frac{1}{(1+x)^2}=0$$

(x_0,y_0) $y''(0)+0+4-1=0 \Rightarrow y''(0)=-3<0 \Rightarrow$ ~~maximum~~ lokális maximum

$y''(x,y),\ldots,y^{(n)}(x,y)$ számolható

Folytonos függvény szélsőértéke korlátos zárt intervallumon

(1)

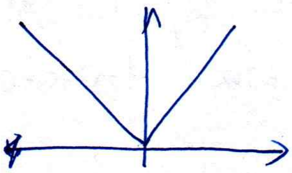
W-2 Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit

Ha a szélsőérték x_0-ban van és x_0 az I belső pontja és $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$

Vizsgálandó pontok (ahol lehet szélsőérték)
- $\exists f'(x)=0$
- ahol $\nexists f'(x)$
- Intervallum végpontjai

Pl $f(x) = |(x+1)(x-3)|$ szélsőértékei az $I=[-2,+2]$ intervallumon?

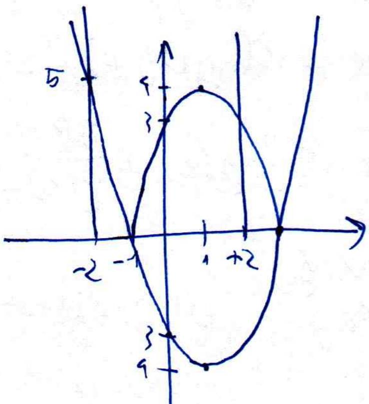
f folytonos, de nem mindenhol deriválható



$$|x|' = \begin{cases} +1, \text{ ha } x \text{ pozitív} \\ -1, \text{ ha } x \text{ negatív} \\ \nexists, \text{ ha } x=0 \end{cases}$$

~~$f'(x) = \pm(x+1)(x-3)\cdot(x-x)$~~

$f'(x) \pm 1\cdot(2x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$



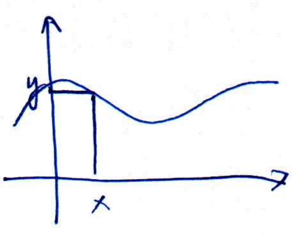
globális maximum $\rightarrow f(-2)=5$ } végpontok

$f(+2)=3$

$f(1)=4$ $(f'(x)=0)$

globális minimum $\rightarrow f(-1)=(f(+3))=0$ $(\nexists f')$

Paraméteres görbe deriválása



Görbe explicit megadása

$y(x)=\ldots$

Nem minden görbe adható meg így

Anal ea

2021. 11. 10
2

Paraméteres megadás: $\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right\}$ általánosabb

t - paraméter

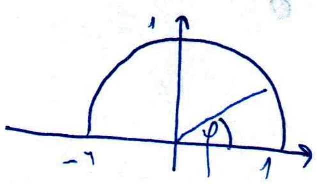
M.: • Ugyanazt a görbét többféleképpen lehet paraméterezni

• $y(x)$ egy paraméteres átírása:

$\tilde{x}(t) = t$

$\tilde{y}(t) = y(t) = y(\tilde{x}(t))$;

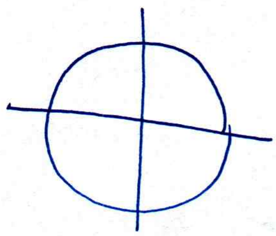
pe Félkör $x^2+y^2=1$ $y \geq 0$



$\Rightarrow y(x) = +\sqrt{1-x^2}$

$\left.\begin{array}{l} x(\varphi) = \cos\varphi \\ y(\varphi) = \sin\varphi \end{array}\right\} \varphi = 0 \ldots \pi$

Kör



$\left.\begin{array}{l} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{array}\right\} \varphi \in [0; 2\pi]$

Implicit megadás: $x^2+y^2=1$

T.: Legyen $x = \xi(t)$
$y = \eta(t)$ - egy görbe paraméteres egyenlete

1, Ha egy $[t_1, t_2]$-n ξ szigorúan monoton nő, akkor $\exists$ a görbe $y(x)$ megadása

2, Ha még $\exists\, \dot{\xi}(t_0), \dot{\eta}(t_0)$; $\dot{\xi}(t_0) \neq 0 \Rightarrow y'(\underset{\xi(t_0)}{x_0}) = \dfrac{\dot{\eta}(t_0)}{\dot{\xi}(t_0)}$

3, Ha még $\exists\, \ddot{\xi}(t_0), \exists\, \ddot{\eta}(t_0)$, akkor $y''(x_0) = \left.\dfrac{\ddot{\eta}\dot{\xi} - \dot{\eta}\ddot{\xi}}{\dot{\xi}^3}\right|_{t_0}$

B.: 1, Ha ξ szig $\nearrow$ akkor megadható így:

$$y(x) = \eta(\xi^{-1}(x))$$

2, $$y'(x) = \dot\eta(\xi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\dot\xi(t)} = \frac{\dot\eta}{\dot\xi}\Big|_t$$

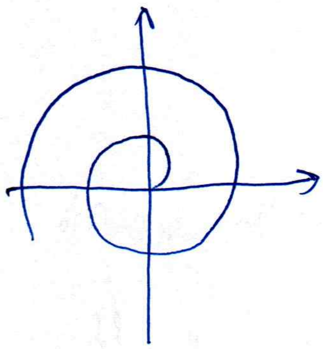
$$(\xi^{-1})'(x) = \frac{1}{\dot\xi(\underbrace{\xi^{-1}(x)}_{t})}$$

Egyszerűbb (pongyola) $$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right) = \dot\eta \cdot \frac{1}{\dot\xi}$$

3, $$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot\eta}{\dot\xi} \circ \xi^{-1}\right)\Bigg|_x = \frac{\ddot\eta\dot\xi - \dot\eta\ddot\xi}{\dot\xi^3} \circ \xi^{-1}\Big|_t =$$

$$= \frac{\ddot\eta\dot\xi - \dot\eta\ddot\xi}{\dot\xi^3}(t) \checkmark$$

Pl $$\left.\begin{aligned} x(t) &= t\cos(t) \\ y(t) &= t\sin(t) \end{aligned}\right\}$$ Spirál



$t_0 = \frac{\pi}{3}$ $\quad x_0 = x(t) = \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$y_0 = y(t) = \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

$f(x) = y(x)$, $f'(x) = ?$, $f''(x) = ?$

$\dot x(t) = \cos t - t\sin t$ $\qquad \dot x(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

$\dot y(t) = \sin t + t\cos t$ $\qquad \dot y(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$

$\ddot x(t) = -2\sin t - t\cos t$ $\qquad \ddot x(t) =$

$\ddot y(t) = \cancel{ff}$ $\qquad \ddot y(t) =$

$f'(x_0) = \frac{\dot y(t_0)}{\dot x(t_0)} =$

Anal ea

2021. 10. 10
3

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

↳ a, Határozatlan integrálás
↳ b, Határozott integrálás

a, Deriválás inverz művelete
adott f, keressük F-et, melyre $F' = f$

b, Függvény alatti területszámítás

↳ Kapcsolat: Newton-Leibniz formula

Határozatlan integrálás

D.: F az f függvénynek az I intervallumon primitív függvénye, ha $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$

Pl. $F(x) = \cos(2x)$ $\quad F'(x) = -2\sin(2x) = -4\sin x\cos x$

$G(x) = 2\cos^2 x$ $\quad G'(x) = -4\cos x \sin x$

Tehát az $f(x) = -4\sin x\cos x$ -nek F és G is primitív függvénye

Integrálás alaptétele: Ha $F' = G'$ egy intervallumon, akkor F és G konstansban térnek el

D.: Az I intervallumon az f függvény határozatlan integrálja a primitív függvények összessége

Jel.:

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \tilde{F} \;\middle|\; \tilde{F}' = f \text{ az } I\text{-n} \right\} = F(x) + c$$

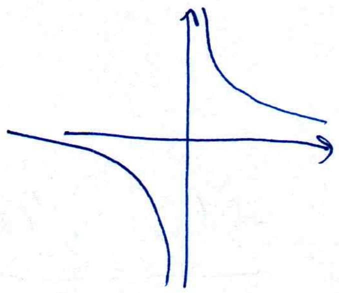
Anal ea

ZH: - függvényelemzés
- folytonos függvény zárt intervallum

∅ implicit deriválások

∅ derivált táblázat

pl $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$



$\int \frac{1}{x}\,dx=?$

a, $I_1=(0,+\infty)$-en

$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x+c \qquad \left((\ln x)'=\frac{1}{x}\right)$

b, $I_2=(-\infty,0)$-on

$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln(-x)+c \qquad \left((\ln(-x))'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}\right)$

$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+c$ $\quad I_1$ és I_2-n is jó

A határozatlan integrál tulajdonságai

1, $\int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

2, $\int c\cdot f(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$

3, $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+c \qquad F'=f$

Biz A deriválás tulajdonságaiból következnek

3: Valóban:

$$\left(F\left(\varphi(x)\right)+c\right)' = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

3 speciális esetei

a, $\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c \qquad \alpha\neq -1$

Valóban: $\left(\dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}\right)' = \dfrac{\alpha+1}{\alpha+1}\cdot f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$ ✓

b, $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+c$

$\left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \qquad \left(\ln(-f(x))\right)' = \dfrac{-f'(x)}{-f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

c, $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)}+c$

d, $\int f(\alpha x+\beta)\,dx = \dfrac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha}+c \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad \alpha\neq 0,\ F'=f$

Valóban: $\left(\dfrac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha}\right)' = \dfrac{1}{\cancel{\alpha}}\cdot F'(\alpha x+\beta)\cdot\cancel{\alpha} = f(\alpha x+\beta)$

Néhány határozatlan integrál

Pl $\int \sin(3x)\,dx = -\dfrac{\cos(3x)}{3}+c$

Pl $\int \dfrac{6e^{3x}-2e^{-x}}{e^{2x}}\,dx = \int \left(6e^{x}-2e^{-3x}\right)dx = 6\int e^{x}dx-2\int e^{-3x}dx = 6e^{x}-2\dfrac{e^{-3x}}{-3}+$

Anal ea

Pl $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$, $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ha $x \neq -1$

Pl $\int \mathrm{sh}(x) \cdot (3+4\mathrm{ch}\,x)^3\,dx = \frac{1}{4}\int 4\,\mathrm{sh}\,x(3+4\mathrm{ch}\,x)^3\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{(3+4\mathrm{ch}\,x)^4}{4} + c$

$(3+4\mathrm{ch}\,x)' = 4\mathrm{sh}\,x$ $\quad f' \cdot f^3$ alak

$\frac{f'}{f}$ alak

Pl $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$

Pl $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \mathrm{tg}\,x - x + c$

Pl $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \mathrm{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + c$

$f^2 \cdot f'$ alak

Pl $\int \sin x \cos^3 x\,dx = -\int(-\sin x)\cos^3 x\,dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + c$

Pl $\int x^2\,\mathrm{sh}(3x^3-5)\,dx = \frac{1}{9}\int(9x^2)\,\mathrm{sh}(3x^3-5)\,dx = \frac{\mathrm{ch}(3x^3-5)}{9} + c$

$(3x^3-5)' = 9x^2$ $\quad \varphi'(\mathrm{sh}(\varphi(x))$ alak

Pl $\int \frac{3}{2+5x}\,dx = 3\,\frac{\ln|2+5x|}{5} + c$

Pl $\int \frac{3}{(2+5x)^2}\,dx = 3\int(2+5x)^{-2}\,dx = 3\,\frac{(2+5x)^{-1}}{(-1)5} + c$

Pe $\int \frac{3}{2+5x^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{1+\frac{5}{2}x^2} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)^2} = \frac{3}{2}$ ...

Pe $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{\arcsin(2x)}{2} + c$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Pe $\int \frac{dx}{\sqrt{1+(4x)^2}} = \frac{\operatorname{arsh}(4x)}{4} + c$

$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Pe $\int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\arcsin(2x)}{2}$

Pe $\int \frac{x}{\sqrt{3+5x^2}}dx = \frac{1}{10}\int 10x\left(3+5x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{10} \cdot \frac{\left(3+5x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$(3+5x^2)' = 10x$

Pe $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

$3-\left(2x+x^2\right) = 3-(x+1)^2+1$

Integrálási módszerek

$\boxed{1}$ $\sin(ax)\cdot\cos(bx)$ alakú integrandus

I. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

II. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$$\frac{I_+ + I_-}{2}=\frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big)=\sin\alpha\cos\beta$$

$$\frac{II_+ + II_-}{2}=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big)=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\frac{II_- - II_+}{2}=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big)=\sin\alpha\sin\beta$$

Pl. $\int \sin(2x)\cdot\sin(3x)\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos x-\cos(5x))\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{10}\sin(5x)+C$$

Pl. $\int \cos(3x)\cos(5x)\,dx=\frac{1}{2}\int\cos(8x)+\cos(2x)\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin(8x)}{8}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{2}+C$$

$\boxed{2}$ $\sin^n x \cdot \cos^m x$ ~~integrálás~~

a, n vagy m páratlan

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ felhasználásával

$\sin^{2k+1} x = \sin x (\sin^2 x)^k = \sin x (1-\cos^2 x)^k$

$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos x (1-\sin^2 x)^2 dx = \int \cos x \cdot \sin^4 x\, dx -$

$-2 \int \cos x \cdot \sin^2 x\, dx + \int \cos x\, dx$

b, n és m is páros

$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

pe| $\int \sin^6 x\, dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \frac{1}{8} \int \left(1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2(2x) - \cos^3(2x)\right) dx$

$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos(2x)\, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2(2x)\, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 x\, dx =$

$= \frac{x}{8} - \frac{3\sin(2x)}{16} + \frac{3x}{16} + \frac{3\sin(4x)}{16 \cdot 4} - \frac{\sin x}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin^3 x}{3} + C$

pe| $\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx = \int \cos x (1-\sin^2 x)(\sin^2 x)\, dx = \int \cos x \sin^2 x\, dx -$

$- \int \cos x \cdot \sin^4 x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx$

Parciális integrálás

Szorzat deriváltja

$(u \cdot v)' = u'v + vu'$

$uv' = (uv)' - u'v \quad / \int$

$$\boxed{\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx}$$

a, $$\int \underbrace{\text{polinom}}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{matrix} e^{ax} \\ \sin(ax);\ \cos(ax) \\ sh(ax);\ ch(ax) \end{matrix} \right\}}_{v'(x)} dx$$

Pl $$\int (x^2+x+1)\, sh(2x)\, dx = \frac{1}{2}(x^2+x+1)\, ch(2x) - \frac{1}{2}\int (2x+1) \cdot ch(2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+x+1)\, ch(2x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x+1)\, sh(2x) - \frac{1}{2}\int 2 \cdot sh(2x)\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+x+1)\, ch(2x) - \frac{1}{4}(2x+1)\, sh(2x) + \frac{1}{4} ch(2x) + c \quad ✓$$

b, $$\int \underbrace{\text{polinom}}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \ln(ax) \\ \arcsin(ax);\ \arccos(ax) \\ \text{arctg}(ax) \quad \text{arctg}(ax) \end{matrix} \right.}_{u(x)}$$

Pl $$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x c$$

Pl $$\int \arcsin(x)\, dx = \int 1 \cdot \arcsin(x)\, dx = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

Anal ea

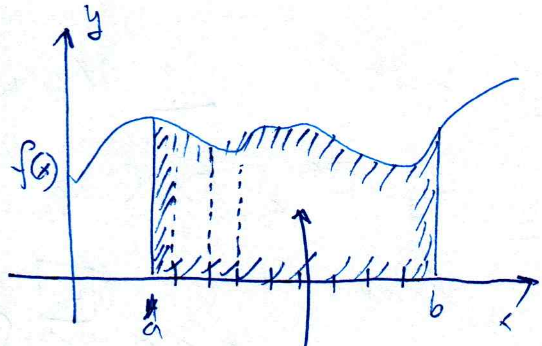
2021.11.22
1

Helyettesítéses integrálások

→ Majd (határozott integrál után)

Határozott int. (Riemann int.)

Görbe alatti terület számítása

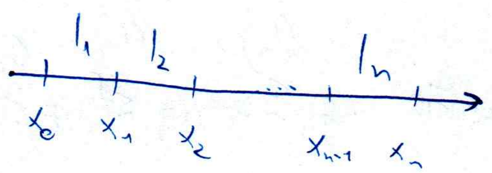


$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Jelölések: $I=[a,b]$ korlátos, zárt (integrálási tartomány)

Osztópontok (véges n db)

$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$



Részintervallumok: $I_k=[x_{k-1},x_k]$; $k=1\ldots n$

Ezek nagysága: $\Delta x_k=|I_k|=x_k-x_{k-1}$

I Felosztása

$F_n=\{I_k\}_{k=1}^n$

F_n felosztás finomsága:

$\Delta F_n=\max\limits_{k=1,n}\{\Delta x_k\}$

Minden határon túl finomodó felosztás-sorozat (MHTFFS)

$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\Delta F_n\xrightarrow{n\to\infty}0$

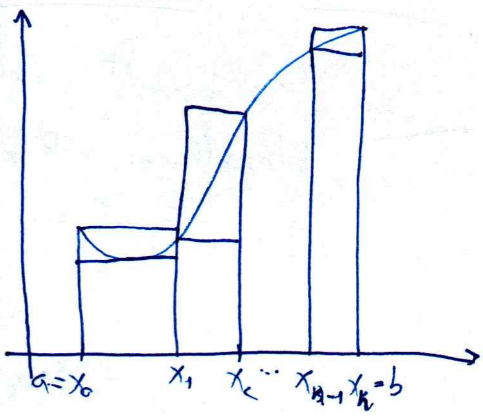
Alsó és felső közelítő összeg

Adott $I=[a,b]$ korlátos, zárt, $F=$ véges, folytonos

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fgv

$s_F=\sum\limits_{h=1}^{k}m_k\Delta x_k$ $\quad m_k=\inf\{f(x)\}\quad x\in I_k$

$S_F=\sum\limits_{h=1}^{k}M_k\Delta x_k$ $\quad M_k=\sup\{f(x)\}\quad x\in I_k$



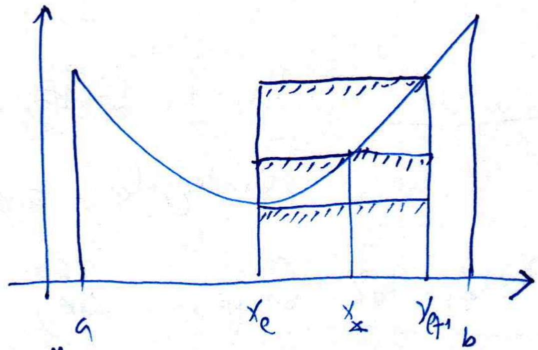
M. $m_\ell, M_\ell \in \mathbb{R}$, mert f korlátos (Dedekind-tétel)

$\Rightarrow \exists s_F, \exists S_F$

L_1 $s_F \le S_F$; B_1: $\forall \ell: m_\ell \le M_\ell$ (inf $\le$ sup)

L_2 Ha F^* az F-ből egy új ~~x~~ x_* osztópont elhelyezésével jön létre, akkor

$$s_F \le s_{F^*} \overset{\boxed{L_1}}{\le} S_{F^*} \le S_F$$



B_2: Tfh $a \le x_\ell \le x_* \le x_{\ell+1} \le b$

csak 1 tag érintett

Szűkebb intervallumon f infimuma nő, supremuma csökken

L_3 $s_{F_1} \le S_{F_2}$

B_3 Legyen $F_1 \cup F_2$ az együttes felosztás $s_{F_1} \overset{(L_2)}{\le} s_{F_1 \cup F_2} \overset{(L_1)}{\le} S_{F_1 \cup F_2} \overset{(L_2)}{\le} S_{F_2}$

D: Darboux féle alsó és felső int.

$h = \sup\limits_{F \text{ véges felosztás}} \{s_F\}$

~~M~~: L_4: ~~Nyilvánvaló~~

$-\infty < h \le H < +\infty$

$H = \inf\limits_{F \text{ véges felosztás}} \{S_F\}$

B_4: Nyilvánvaló

$h = \underline{\int_a^b} f(x)dx$

$H = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

D: Határozott int.: Az f korlátos függvény az $[a,b]$ korlátos intervallumon Riemann szerint ~~inter~~ integrálható, ha $h = H$. Ekkor az integrál:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = h = H =: (I)$$

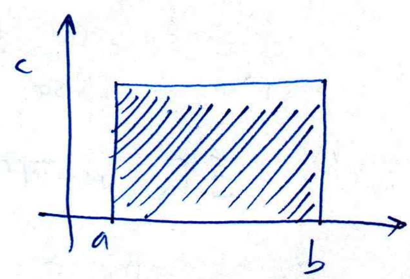
$$\sum f(\xi_\ell)\Delta x_\ell \xrightarrow{\min\{\Delta x_\ell\} \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Anal ea

2021. 11. 22
2

J.: $[a,b]$-n Riemann integrálható fgv.-k

$$R[a,b] := \left\{ f:[a,b]\to\mathbb{R} \;\middle|\; \exists \int_a^b f(x)\,dx \right\}$$



Pl: $f(x) = c$, F = felosztás

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = c \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c\cdot(b-a)$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = c \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b-a)$$

$$\Rightarrow h = H = \int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$$

Pl: Dirichlet fgv nem Riemann-integrálható

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } & x\in\mathbb{Q} \\ 0, \text{ ha } & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = 0$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = b-a$$

$$H = b-a \neq h = 0 \qquad \Rightarrow \chi_{\mathbb{Q}} \notin R[a,b]$$

A Riemann integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fgv.

T_1: Ha F_n MHTFFS $(\Delta F_n \xrightarrow{n\to\infty} 0)$, akkor $\exists \lim_{n\to\infty} s_{F_n} = \ell$; $\exists \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = H$

B_1: $\emptyset$ (pl. lehet F_n az egyenlőközű, n elemű felosztással)

T_2: 1, Ha $\exists \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \forall F_n$ MHTFFS esetén

$$\lim_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = \int_a^b f(x)dx$$

2, Ha $\exists F_n$ MHTFFS, ~~akkor~~ amire

$$\lim_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = I \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx = I$$

B_2: 1, $f \in R[a,b] \Rightarrow \ell = H$

$$\underset{T_1}{\parallel}\lim_{n\to\infty} s_{F_n} \qquad \underset{T_1}{\parallel}\lim_{n\to\infty} S_{F_n}$$

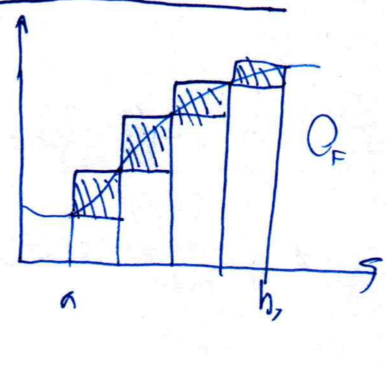
2, T_1 szerint $\left.\begin{array}{l}\ell = \lim_{n\to\infty} s_{F_n} \\ H = \lim_{n\to\infty} S_{F_n}\end{array}\right\}$ feltevés

$\Rightarrow \ell = H \Rightarrow f \in R[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \ell = H$

— · —

D.: Az F felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg

$$O_F = S_F - s_F \geq 0$$

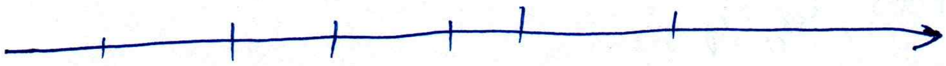


T_3: $\exists \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ esetén ~~[illegible]~~ $\exists F_\varepsilon$ melyre

$$0 \leq O_{F_\varepsilon} < \varepsilon$$

B3 $(\Rightarrow)$ $\varepsilon > 0$ adott $\quad \ell = H = I$

$$s_{F_1} \le s_{F_1 \cup F_2} \le I \le S_{F_1 \cup F_2} \le S_{F_2}$$



$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_{F_1} \le I = \ell = H \le S_{F_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$O_{F_1 \cup F_2} \le S_{F_2} - s_{F_1} < \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ adott $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow F_\varepsilon$

$$s_{F_2} \le \ell \le H \le S_{F_2} \Leftrightarrow \varepsilon \ge O_{F_2} = S_{F_2} - s_{F_2} \ge H - \ell \ge 0 \quad \forall \varepsilon > 0\text{-ra}$$

$\Rightarrow H = \ell \Rightarrow f \in R[a,b]$

D: f fgv

$\underline{T_4}$ 1, $\exists \int_a^b f(x)\,dx = I \Rightarrow \forall F_n$ MHTFFS

$\sigma_{F_n} \xrightarrow{n\to\infty} I$ A ξ_e reprezentációs pontoktól függetlenül

2, $\exists F_n$ MHTFFS, hogy ξ_e

$\sigma_{F_n} \xrightarrow{n\to\infty} I \Rightarrow f \in R[a,b]$; $\exists \int_a^b f(x)\,dx = I$

~~Elégséges feltétel~~

Elégséges feltétel Riemann integrálhatóságra

$\underline{T_1}$ Ha $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $[a,b]$-n (~> korlátos) $\Rightarrow f \in R[a,b]$

$\underline{T_2}$ Ha $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n (~> korlátos W1) $\Rightarrow f \in R[a,b]$

Ismétlés

Newton-Leibniz tétel

Ha ~~...~~ $f \in R[a,b]$ (Riemann-int.-ható)

és $\exists F\ [a,b] \to \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in [a,b]\ F'(x) = f(x)$

($\exists$ primitív fgv. $[a,b]$-n)

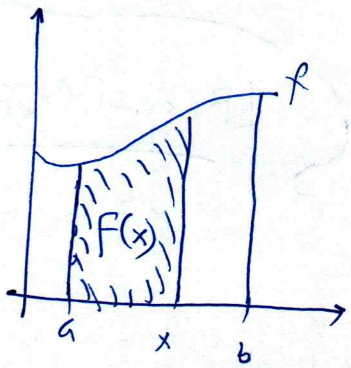
akkor
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b}$$

INTEGRÁLFÜGGVÉNY

Legyen $f \in R[a,b]$

D.: f integrálfüggvénye:

$$F(x) \int_{t=a}^{x} f(t)\,dt\,; \quad x \in [a,b]$$



T.: (INTEGRÁLSZÁMÍTÁS II. ALAPTÉTELE)

$$f \in R[a,b] \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

① F folytonos $[a,b]$-n

② Ha f folytonos x_0-ban, akkor F diffható x_0-ban, és $F'(x_0) = f(x_0)$

B.: ① $f \in R[a,b] \Rightarrow |f(x)| \leq K < \infty$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{t=a}^{x} f(t)dt - \int_{t=a}^{x_0} f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_{t=x_0}^{x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_{t=x_0}^{x} \underbrace{|f(t)|}_{\leq K} dt \right| \leq \left| \int_{t=x_0}^{x} K dt \right| = |x - x_0| \cdot K \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

② $$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \overset{?}{=} f(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)}$$ $\overset{?}{=} 0$

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_{t=x_0}^{x} f(t)dt - \overbrace{f(x_0)(x - x_0)}^{\int_{t=x_0}^{x} f(x_0)dt}}{x - x_0} \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_{t=x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))dt}{x - x_0} \right| \leq \frac{\left| \int_{t=x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)| dt \right|}{|x - x_0|} \leq \frac{\left| \int_{t=x_0}^{x} \varepsilon dt \right|}{|x - x_0|} = \frac{\cancel{|x - x_0|} \varepsilon}{\cancel{|x - x_0|}} =$$

$= \varepsilon$

q.e.d.

Helyettesítéses integrálás

Volt: $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))+C$

(valóban: $\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$)

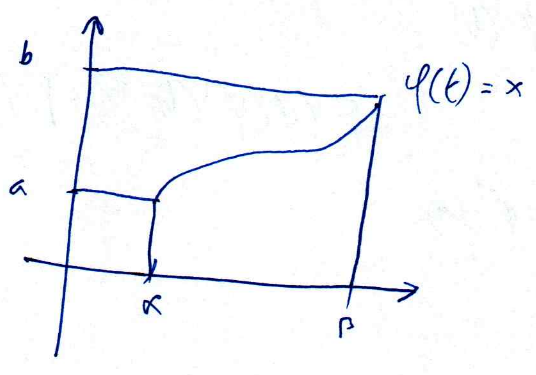
Legyen $x=\varphi(t)$

$$\boxed{\underbrace{\int f(x)\,dx\,\Big|_{x=\varphi(t)}} = \int f(\varphi(t))\cdot \underbrace{\overbrace{\varphi'(t)}^{\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}}\,dt}_{\text{„}dx\text{"}}}$$

$$F(x)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Feltétel: - φ legyen folytonosan diffható $[\alpha,\beta]$-n ($[a,b]=\varphi([\alpha,\beta])$)

- f folytonos $[a,b]$-n



Pél

$$I=\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx \quad : \quad t=\sqrt[3]{x-1} \text{ helyettesítéssel}$$

x – régi változó
t – új változó

$$t^3+1=x(t) \Rightarrow 3t^2\,dt=dx$$

$$\frac{dx}{dt}=3t^2$$

$$\int\frac{(t^3+1)^2}{t}\cdot 3t^2\,dt=3\int(t^7+2t^4+t)\,dt=$$

$$=\frac{3}{8}t^8+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^2+c=\frac{3}{8}(x-1)^{\frac{8}{3}}+\frac{6}{5}(x-1)^{5/3}+\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}+c$$

Határozott integrál helyettesítése

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx=\int_{t=\varphi^{-1}(a)=\alpha}^{\varphi^{-1}(b)=\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$x=\varphi(t)$

B.: Legyen $F'=f$

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)=\Big[F(\varphi(t))\Big]_{t=\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}=F(\varphi(\varphi^{-1}(b)))-F(\varphi(\varphi^{-1}(a)))=$$

$$=F(b)-F(a)=\big[F\big]_a^b=\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \;\checkmark$$

Anal ea

2021.11.29

3

a, $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

$\uparrow$

Racionális törtfüggvény, $a \neq 0$

ax^2+bx+c teljes négyzetté alakítás, A, B, C x-ben lineáris

$\Rightarrow K\sqrt{1-A^2} \Rightarrow A(x) = \sin(t)$

$A(x) = \alpha x + \beta$

$B(x) \dots$

$\vdots$

$\Rightarrow K\sqrt{B^2+1} \Rightarrow B(x) = sh(t)$

$\Rightarrow K\sqrt{C^2-1} \Rightarrow C(x) = ch(t)$

pl $\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx \Rightarrow \int \sqrt{sh^2 t+1} \cdot ch t\,dt = \int ch^2 t\,dt =$

$x+1 = sh t \Rightarrow dx = ch t\,dt$

$ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1$

$= \int \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int \left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)+c =$

$= \frac{1}{4}\underbrace{sh(2t)}_{2\,sh t\, ch t} + \frac{1}{2}t + c \;\; \| = \frac{1}{4}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\,arsh(x+1) + c$

b, $\int R(e^x)dx \Rightarrow t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}\cdot\frac{dt}{t}$

$\hookrightarrow x=\ln t \Rightarrow dx=\frac{1}{t}dt$

$\Rightarrow \int R(t)\cdot\frac{dt}{t}$ ✓

Pl

$I=\int\frac{dx}{e^{2x}-2e^x}$

$t=e^x \Rightarrow x=\ln t \Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$

$I \Rightarrow \int\frac{1}{t^2-2t}\,\frac{dt}{t}$

nevező: $t(t^2-2t)=t^2(t-2)$

Parc. törtes $\frac{1}{t^2(t-2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-2}\quad / t^2(t-2)$

$1=At(t-2)+B(t-2)+Ct^2$

$t=0 \Rightarrow \quad 1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

$t=2 \Rightarrow \quad 1=4C \quad \Rightarrow C=\frac{1}{4}$

$t=1 \Rightarrow \quad 1=-A-B+C \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$

$\int\frac{1}{t^2(t-2)}dt=\int-\frac{\frac{1}{4}}{t}dt+\int-\frac{\frac{1}{2}}{t^2}dt+\int\frac{\frac{1}{4}}{t-2}dt=$

$=-\frac{1}{4}\ln|t|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{4}\ln|t-2|+C$

Anal ea

Vget (Emlék)

$$\int f(x)\,dx \Rightarrow \underset{x=\varphi(t)}{=} \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

„régi" ↑ ↑ „új"

kölcsönösen egyértelmű, difflató

$$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \text{„} dx=\varphi'(t)\,dt\text{"}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\cdot\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}$$

c) $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right) \Rightarrow \int R\left(\frac{1}{a}(t^n-b),t\right)\cdot\frac{n}{a}\cdot t^{n-1}\,dt$

racionális törtfüggvény

$$t=\sqrt[n]{ax+b}$$

$$x=\frac{1}{a}(t^n-b)$$

$$dx=\frac{n}{a}\cdot t^{n-1}\,dt$$

Pe) $\int x\sqrt{5x+3}\,dx \Rightarrow \int\frac{t^2-3}{5}\,t\,\frac{2}{5}\,t\,dt=HF$

$$t=\sqrt{5x+3}$$

$$x=\frac{t^2-3}{5}$$

$$dx=\frac{2}{5}t\,dt$$

d, $\int R\left(x^{p_i/q_i}\ (i=1,2,\dots n)\right)dx = \int Q(t)\,dt$

$t = x^{1/q}$, ahol q a $q_1, q_2, \dots, q_n$ LKKT-je

$x = t^q$; $dx = q\,t^{q-1}\,dt$

$x^{p_i/q_i} = x^{p_i \cdot n_i}$, $n_i q_i = q$

Pl $\int \frac{1+x^{3/2}}{3-x^{1/3}}\,dx \Rightarrow \int \frac{1+t^9}{3-t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^{14}+t^5}{3-t^2}\,dt$

$q_1=2,\ q_2=3,\quad q=6$

$t=x^{1/6}$; $x=t^6$; $dx=6t^5\,dt$

e, $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = 2\,arctg\,t \Rightarrow dx = 2\,\frac{1}{1+t^2}\,dt$

Pl $\int \frac{1}{2-\cos x}\,dx$; $t = tg\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int\frac{1}{3t^2+1}\,dt = 2\int\frac{1}{1+(\sqrt{3}t)^2}\,dt =$

$= 2\,arctg(\sqrt{3}t)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+c \quad \Big| = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\left(\sqrt{3}\,tg\frac{x}{2}\right)+c$

Anal e4 | IMPROPRIUS INTEGRÁL | 2021.12.01 2

$\int_a^b f(x)\,dx$ határozott integrál esetén

$[a,b]$ korlátos int. és f korl. fgv. Impropius int. esetén

vagy $[a,b]$ nem korlátos vagy f nem korlátos

$\boxed{a)}$ Impropius integrál nem korlátos tartomány esetén

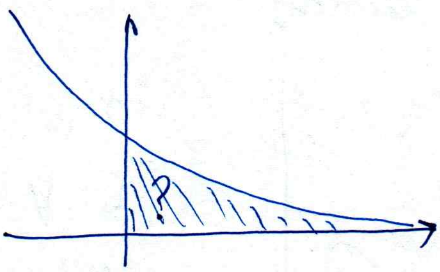
D: Ha $\forall \omega > a$ esetén $f \in R[a,\omega]$, akkor

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f(x)\,dx$$

$\exists$ az impropius integrál $\iff$ $\exists$ a jobb oldali limesz

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\omega\to-\infty} \int_\omega^b f(x)\,dx, \quad f \in R[\omega,b]$$

Pl: $e^{-x} \in R[a,b]$



$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \ \ldots \ = 1$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \int_0^\omega e^{-x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^\omega = \lim_{\omega\to\infty} \left(-e^{-\omega} + e^0\right) = 1$$

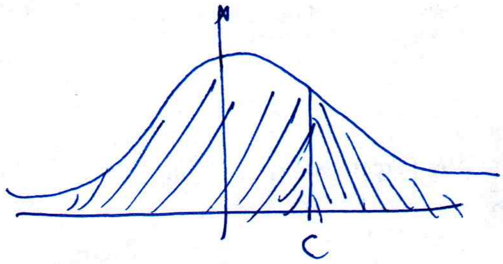
Def.: $\int_a^b f(x)\,dx$ improprius int. ($a,b\in\overline{\mathbb{R}}$) **konvergens**, ha

$\forall c\in(a,b)$ esetén $\exists \int_a^c f(x)\,dx$ és $\exists \int_c^b f(x)\,dx$,

egyébként **divergens**

Köv.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

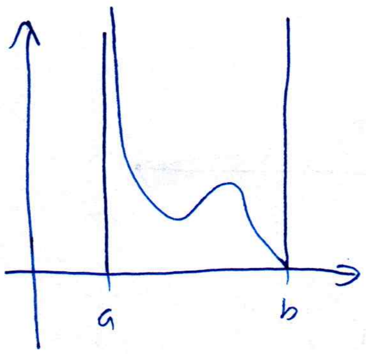


$$= \lim_{\omega_1\to-\infty}\int_{\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\omega_2\to+\infty}\int_{c}^{\omega_2} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\omega_1\to-\infty\\ \omega_2\to+\infty}}\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx \neq \lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\,dx$$ NEIN!!!

$\boxed{b}$ f nem korlátos

1.

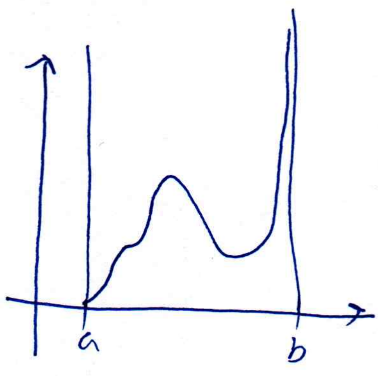


f a környékén nem korlátos

Ha $\forall\,\delta>0$ esetén $f\in R[a+\delta; b]$,

akkor $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$

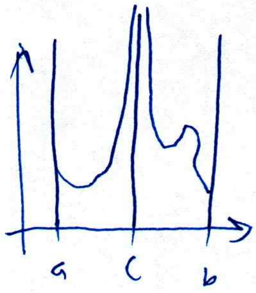
2.



Ha $f\in R[a,b-\delta]$ $\forall\,\delta>0$-ra, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0+}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

(3)



Ha $\forall \delta>0$-ra $f\in R[a,c-\delta]$, $f\in R[c+\delta,b]$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to 0+}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \lim_{\delta_2\to 0+}\int_{c+\delta_2}^b f(x)\,dx$$

Pe

$$\int_0^1 \frac{(\arcsin x)^{\frac13}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\delta\to 0+}\int_0^{1-\delta} (\arcsin x)^{\frac13}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

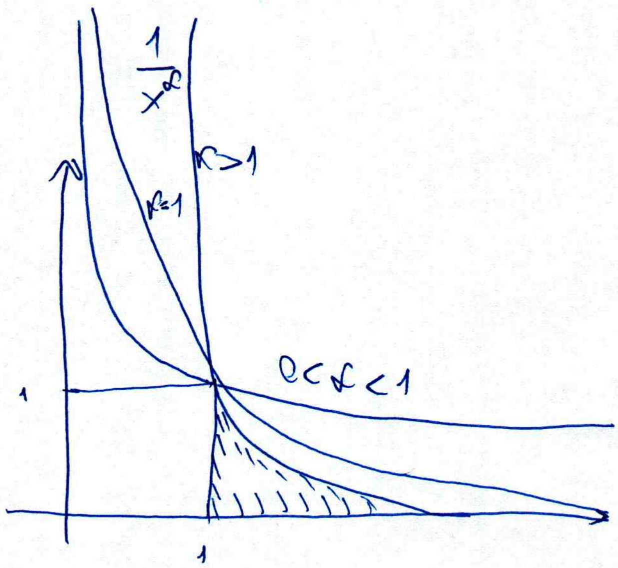
$$= \lim_{\delta\to 0+}\left[\frac{\arcsin^{4/3} x}{4/3}\right]^{1-\delta} = \lim_{\delta\to 0+}\frac34\left(\arcsin^{4/3}(1-\delta) - \arcsin^{4/3}(0)\right) = \frac34\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4/3}$$

Pf

Fontos példa

Mikor használ?

a, $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} <\infty, \text{ ha } \alpha>1 \\ =\infty, \text{ ha } \alpha\le 1 \end{cases}$$



b, $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} <\infty, \text{ ha } 0<\alpha<1 \\ \infty, \text{ ha } \alpha\ge 1 \end{cases}$$

Speciálisan: $\alpha = 1$-re $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$

Valóban $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

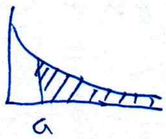
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0+} \int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0+} (\ln 1 - \ln \delta) = +\infty$$

$$[\ln x]_\delta^1$$

Emlék:

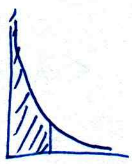
IMPROPRIUS INT.

a, tartomány nem korlátos



$$\lim_{\Omega\to\infty}\int_{x=a}^{\Omega} f(x)\,dx$$

b, függvény nem korlátos



$$\lim_{\delta\to 0+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

Láttuk, hogy $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$

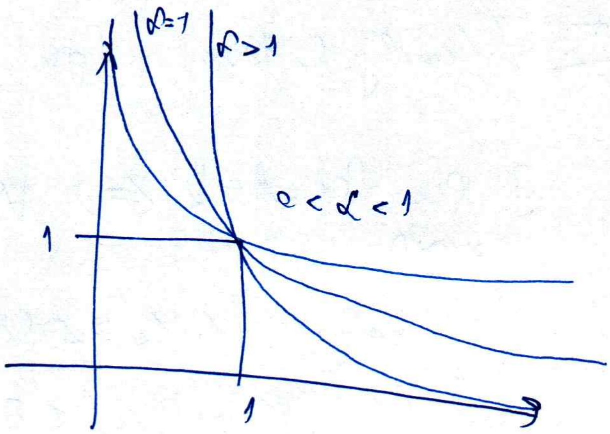
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty$$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$; ill. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ mikor konvergens? $\alpha = 1$ esetén nem konv.

$\boxed{\alpha \neq 1}$

a, $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\Omega\to\infty}\int_1^\Omega x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\Omega\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\Omega = \lim_{\Omega\to\infty}\left(\frac{\Omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty, \text{ ha } \alpha > 1 \text{ (konv)} \\ +\infty, \text{ ha } \alpha < 1 \text{ (divergens)} \end{cases}$$



5, $\boxed{\alpha\neq 1}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\delta\to 0+}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0+}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} < \infty, & \text{ha } 0<\alpha<1 \ (\text{konv}) \\ +\infty, & \text{ha } \alpha>1 \ (\text{div}) \end{cases}$$ <div></div>

Az int. néhány tulajdonsága

Emlék:

T.: (Cauchy-kritérium sorozatokra)

$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ hogy $\forall\, n,m > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$

($\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$: $\forall\, n > N(\varepsilon)$: $|a_n - A| < \varepsilon$)

T.: (Cauchy-kritérium fgv. határértékre)

$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R} \iff \forall\varepsilon>0$ esetén $\exists\, \Omega(\varepsilon)\in\mathbb{R}$, hogy $x_1, x_2 > \Omega(\varepsilon)$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Anal ea

2021. 12. 06
2

T.: (Cauchy-kritérium improprius int-ra) Legyen $f \in R[a,\omega]$ $\forall \omega > a$

$$\exists \int_a^\infty f(x)\,dx = A \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \Omega(\varepsilon) \in \mathbb{R} \text{ hogy}$$

$$\omega_1, \omega_2 > \Omega(\varepsilon) \text{ esetén } \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

B.: Fgv. határértékére vonatkozó Cauchy-kritériumot alkalmazzuk az int. fgv-re

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(folytonos)}$$

$$\underbrace{\exists \lim_{x\to\infty} F(x) = A}_{\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^\infty f(t)\,dt} \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \Omega(\varepsilon) : \forall \omega_1, \omega_2 > \Omega(\varepsilon) \text{ esetén } |\underbrace{F(\omega_2) - F(\omega_1)}_{\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(t)\,dt}| < \varepsilon$$

D.: Az $\int_a^\infty f(x)\,dx$ improprius integrál abszolút konvergens, ha

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$$

D.: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ feltételesen konvergens, ha konvergens $\left(\exists \int_a^\infty f(x)\,dx < \infty\right)$, de nem abszolút konvergens

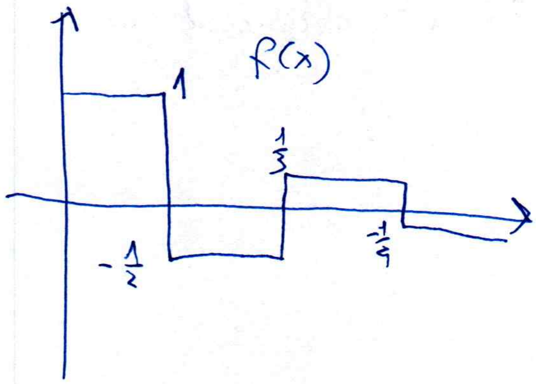
$f \in R[a,\omega]$ $\forall \omega > a$

T.: Legyen $f \in R[a,\omega]$ $\forall \omega > a$. Ekkor

Ha $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$ és $\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|dx$

Emlék

$f \in R[a,b] \Rightarrow f^+, f^-, |f| \in R[a,b]$



Igazolható, hogy $\exists \int_0^\infty f(x)dx = A \in \mathbb{R}$, de

$\int_0^\infty |f(x)|dx = +\infty \Rightarrow$ feltételesen konvergens

---

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$, de $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = A \in \mathbb{R}$

B.: Cauchy-kritériummal

$\exists \int_a^\infty |f(x)|dx \Rightarrow \forall \varepsilon : \exists \Omega(\varepsilon)$, $\omega_1, \omega_2 > \Omega(\varepsilon)$ esetén

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$$

$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_1} f(x)dx\right| < \left|\int \right.$ . . .

Anal ea

2021. 12. 06

3

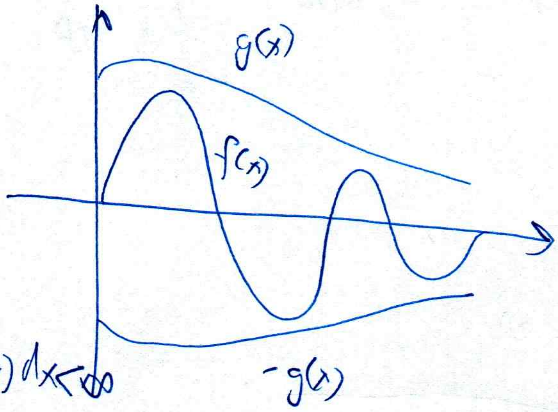
Majoráns kritérium

majoráns

T.: $f, g \in R[a, \omega]$ $\forall \omega > a$, $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, \infty)$

Ha $\exists \int_a^\infty g(x)\,dx < \infty$, akkor

$\exists \int_a^\infty |f(x)|\,dx < \infty$ és



$$0 < \left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \underset{\text{volt}}{\leq} \int_a^\infty |f(x)|\,dx \underset{T.}{\leq} \int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$$

$\forall x$-re $|f(x)| \leq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^\omega |f(x)|\,dx \leq \int_a^\omega g(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Big\downarrow \omega \to \infty \qquad \Big\downarrow \omega \to \infty$$

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx \leq \int g(x)\,dx$$

Cauchy-krit. $\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x)\,dx < \varepsilon$, ha $\omega_1\,\omega_2 > \Omega(\varepsilon)$ és $\omega_1\,\omega_2$

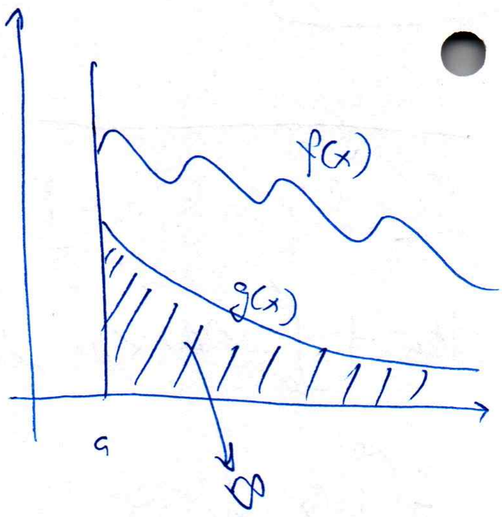
$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\cdot dx$$

I.: MINORÁLÁS KRIT

Legyen $f,g \in R[a,\omega]$ $\forall \omega > a$-ra

Ekkor ha $0 \le g(x) \le f(x)$ $\forall x > a$, és

$\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty$, akkor $\int_a^\infty f(x) = \infty$



Pl Konv.-e?

$$I = \int_2^\infty \boxed{\frac{\operatorname{arctg}(x)}{(x+\sin^2(\sqrt{3}x^2))\ln x}}\,dx$$

↳ $f(x)$ folyt.: $D_f = (0,\infty)\setminus\{1\}$

$\sim \frac{1}{x\ln x}$

$$\int_2^\infty g(x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_2^\omega \frac{1}{x}\ln^{-1}x\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\left[\ln|\ln x|\right]_2^\omega =$$

$\varphi'\cdot\varphi^{-1}$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \ln(\ln(\omega)) - \ln(\ln 2) = \infty$$

$\Rightarrow$ Sejtésem: $I = \infty$ ✓ Minoráljunk

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+\sin^2(\sqrt{3}x^2))\ln x} \ge \frac{1}{2x\ln x} = \frac{1}{2}g(x) \quad \text{és} \quad \int_2^\infty g(x)\,dx = 0$$

✓

Anal ea — 2021. 12. 06.

Pl $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^5 \operatorname{arctg} x}{3+x^7}\,dx$ konvergens-e

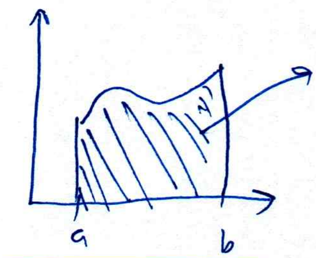
$$\sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^5}{x^7} \sim \frac{1}{x^2} \text{ és } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \text{ és } \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$$

$\Rightarrow$ Sejtés $I<\infty$ Majoráljuk

$$\frac{x^5 \operatorname{arctg} x}{3+x^7} \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^5}{x^7} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x^2} \Rightarrow I<\infty$$

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

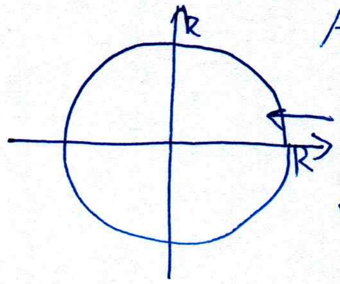
1. Terület



$$T=\int_a^b f(x)\,dx$$

(előjeles) terület

Pl kör területe $A(R)\overset{?}{=}R^2\pi$



$$A(R)=4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$x^2+y^2=R^2$

$y(x)=\sqrt{R^2-x^2}$

$x=R\sin t$

$\sqrt{R^2-x^2}=R\cos t$

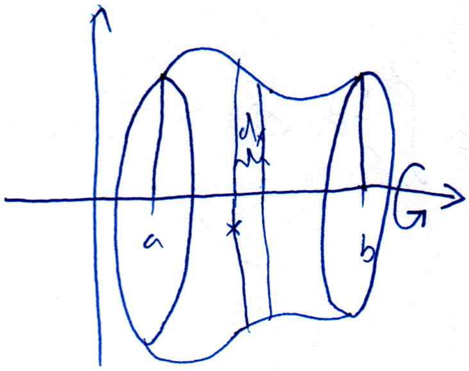
$dx=R\cos t\,dt$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t\cdot R\cos t\,dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=4R^2\int\frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = 4R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin(2t)}{2}+t\right]=2R^2\left(0+\frac{\pi}{2}-(0+0)\right)=$$

$$=R^2\pi$$

b, forgástest térfogata



$V = ?$

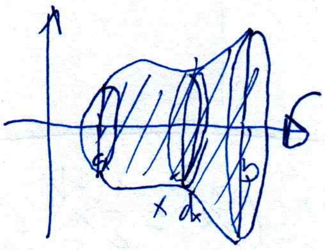
$$dV(x) = \pi \cdot f^2(x)\, dx$$

henger

x és x+dx közötti terület

a, Terület ✓

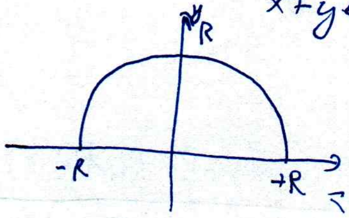
b, Forgástest térfogata



$$dV(x) = \pi \cdot f^2(x)\,dx$$

$$V = \int_a^b dV(x) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Pl. R sugarú gömb térfogata

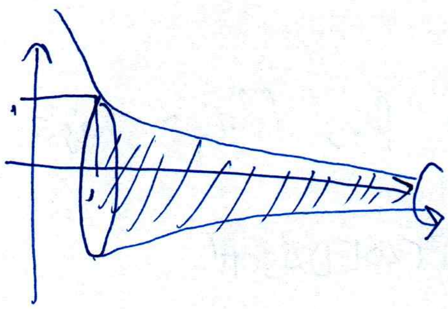


$x^2+y^2=R^2$

$$V(R) = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} R^2-x^2\,dx =$$

$$= \pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right) = \frac{4\pi}{3}R^3$$

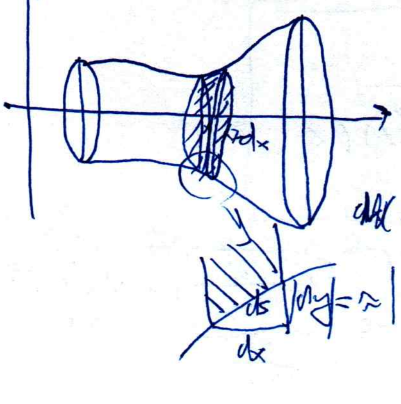
Pl. „Gábriel kürtje"



$$V_{G.K.} = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{\omega\to\infty} \pi \int_1^{\omega} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \pi \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \pi\left(\frac{-1}{\omega}+1\right) = \pi$$

c, Forgástest felszíne (palást)



$$ds^2 \approx dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2(1+f'^2(x))}$$

$$ds(x) = dx\sqrt{1+f'^2(x)}$$

$$|dy| \approx |f'(x)\cdot dx|$$

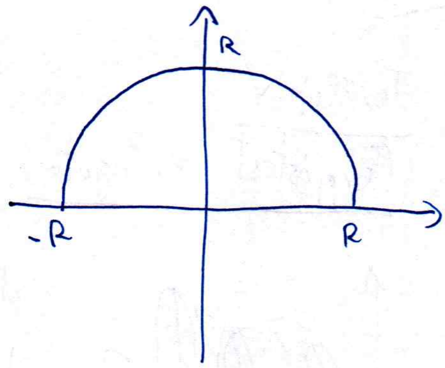
$$dA(x) = 2\pi f(x)\cdot ds(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

$$\boxed{A = \int_a^b dA(x)\,dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

Pél | Gömb felszíne

$$f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$



$$A(R)=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{\underbrace{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}_{\frac{R^2}{R^2-x^2}}}\,dx=$$

$$\boxed{\sqrt{x}'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2$$

Pél | Gábriel kürtjének felszíne

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

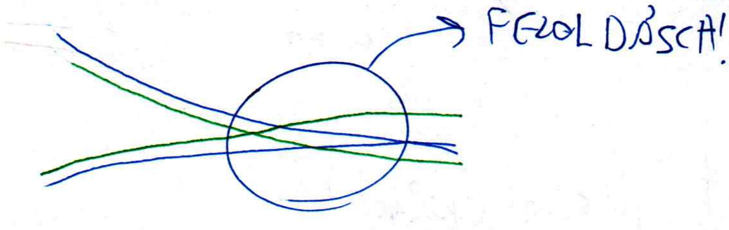
$$A_{G.K.}=2\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\underbrace{1+\frac{1}{x^4}}_{\to 1}}\,dx\geq 2\pi\int_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=\underline{\underline{\infty}}$$

$\frac{1}{x^4}\geq 0$

minorálás

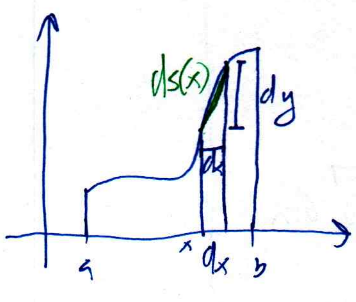
Paradoxon:

Gábriel kürtjébe véges térfogatú festék fér, felszíne mégis végtelen



d, Ívhossz

$f(x)=y$



$$ds(x)\approx\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

$$\boxed{S=\int_a^b ds(x)=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

Pél | Kör kerülete

$$K(R)=\overset{2\text{ félkör}}{2}\int_{-R}^{R}\sqrt{\underbrace{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}_{\frac{R^2}{R^2-x^2}}}\,dx=2\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}=\ldots$$